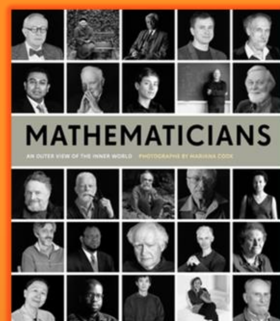
Συλλογή με Μαθηματικές εργασίες



Ανάλυση, Γεωμετρία, Νέες Τεχνολογίες κ. ά.



4 από 6 αρχεία



Γιάννης Πλατάρος



Ανθυφαίρεση
Ανταναίρεση

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία
Το άπειρο

Απειροστικός Λογισμός
Αντιπαράδειγμα

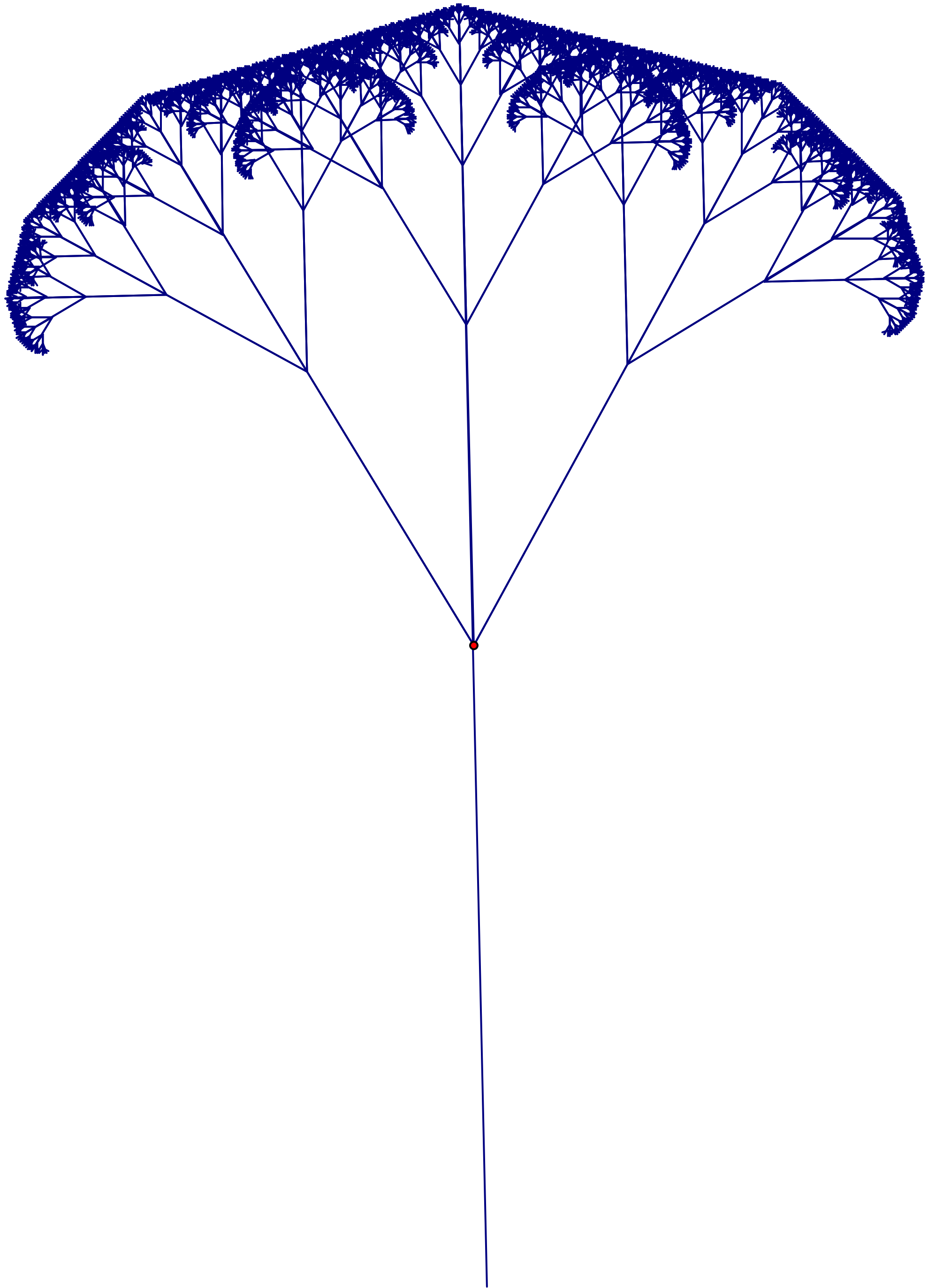
2015

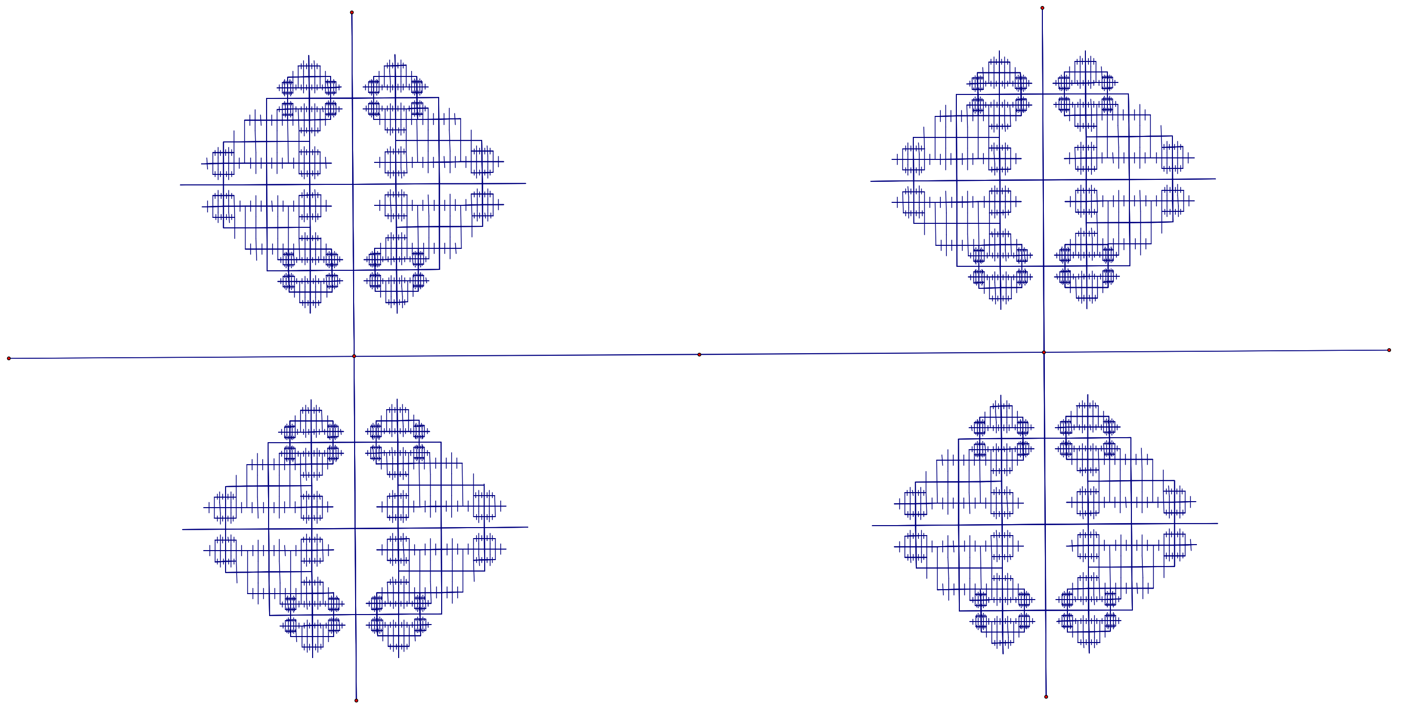
Διδακτική Μαθηματικών

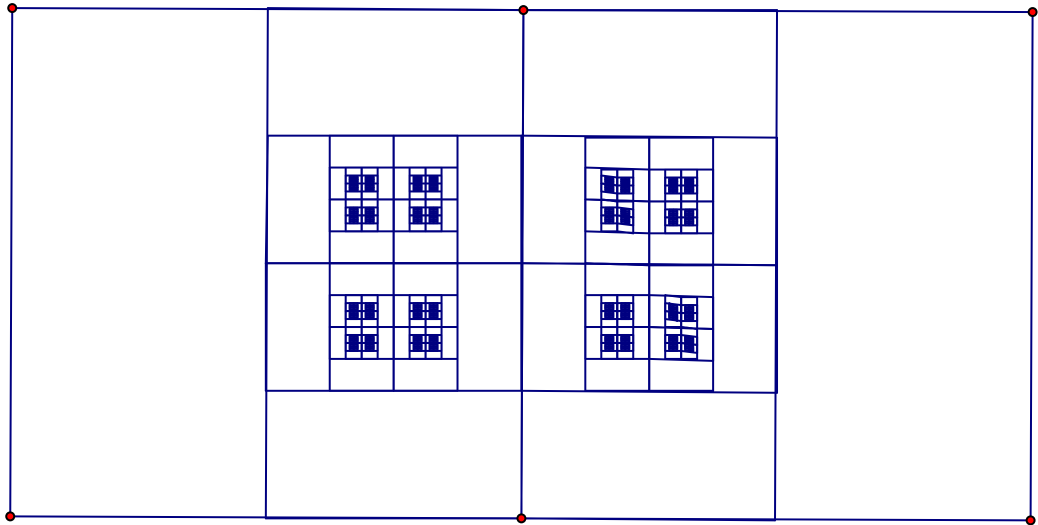
στην Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση.

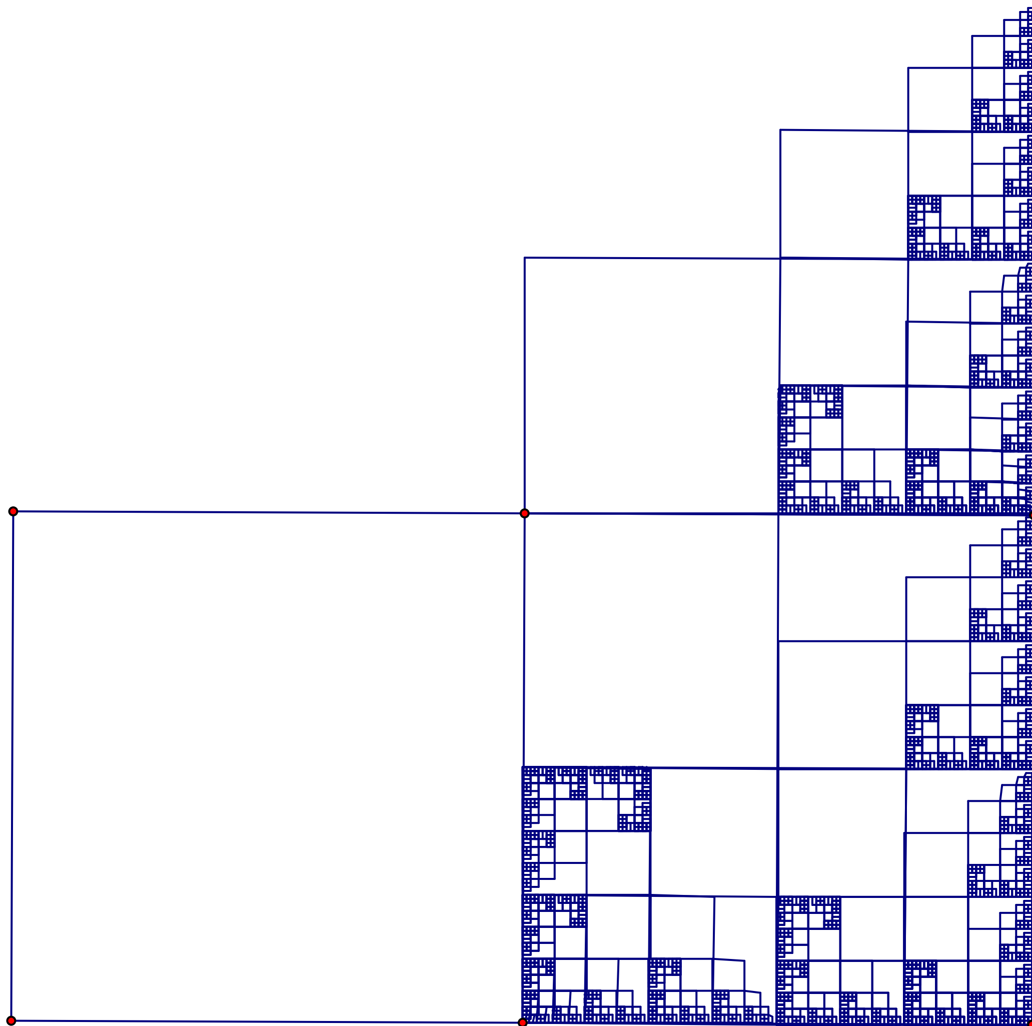


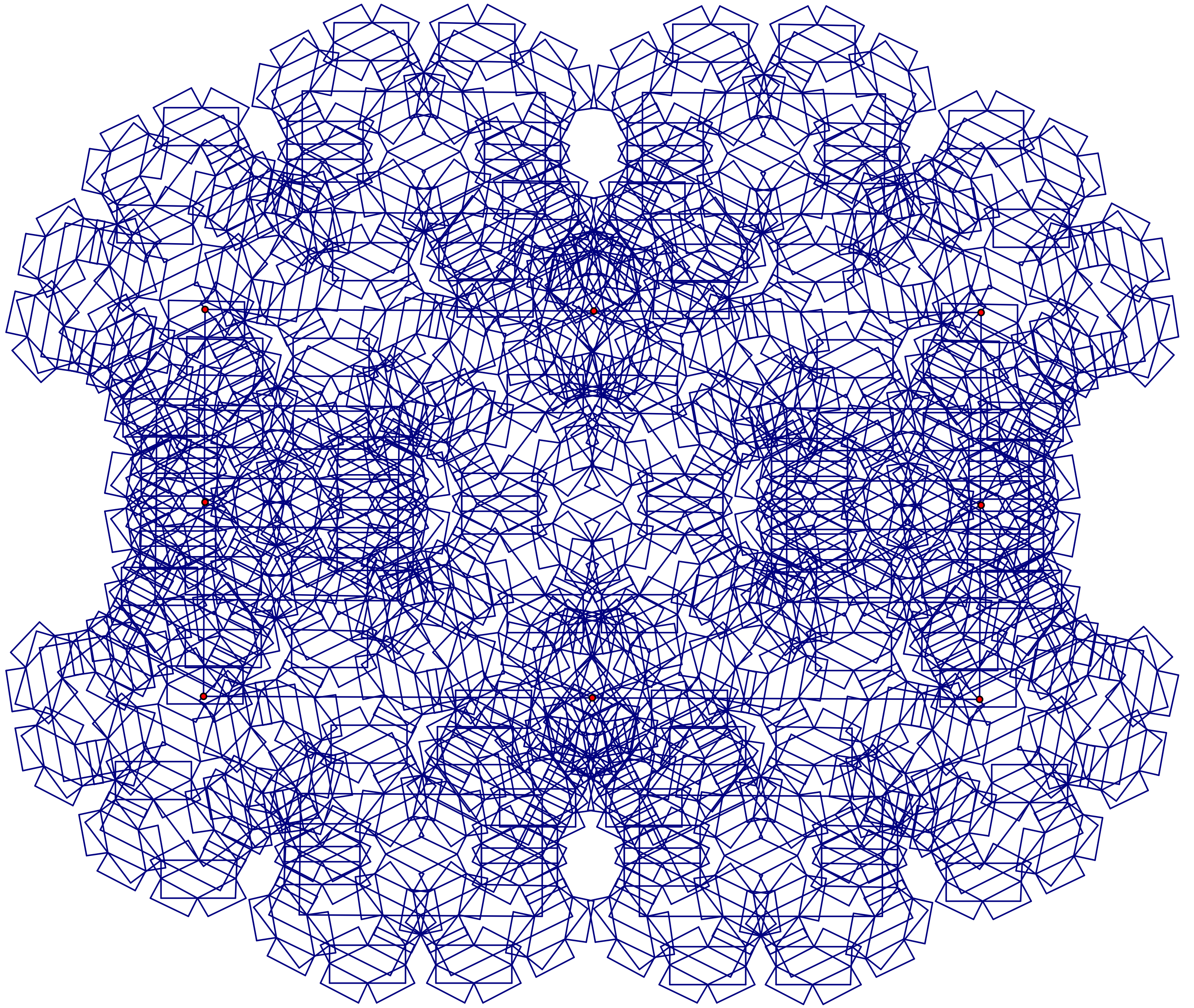
Μεσσήνη

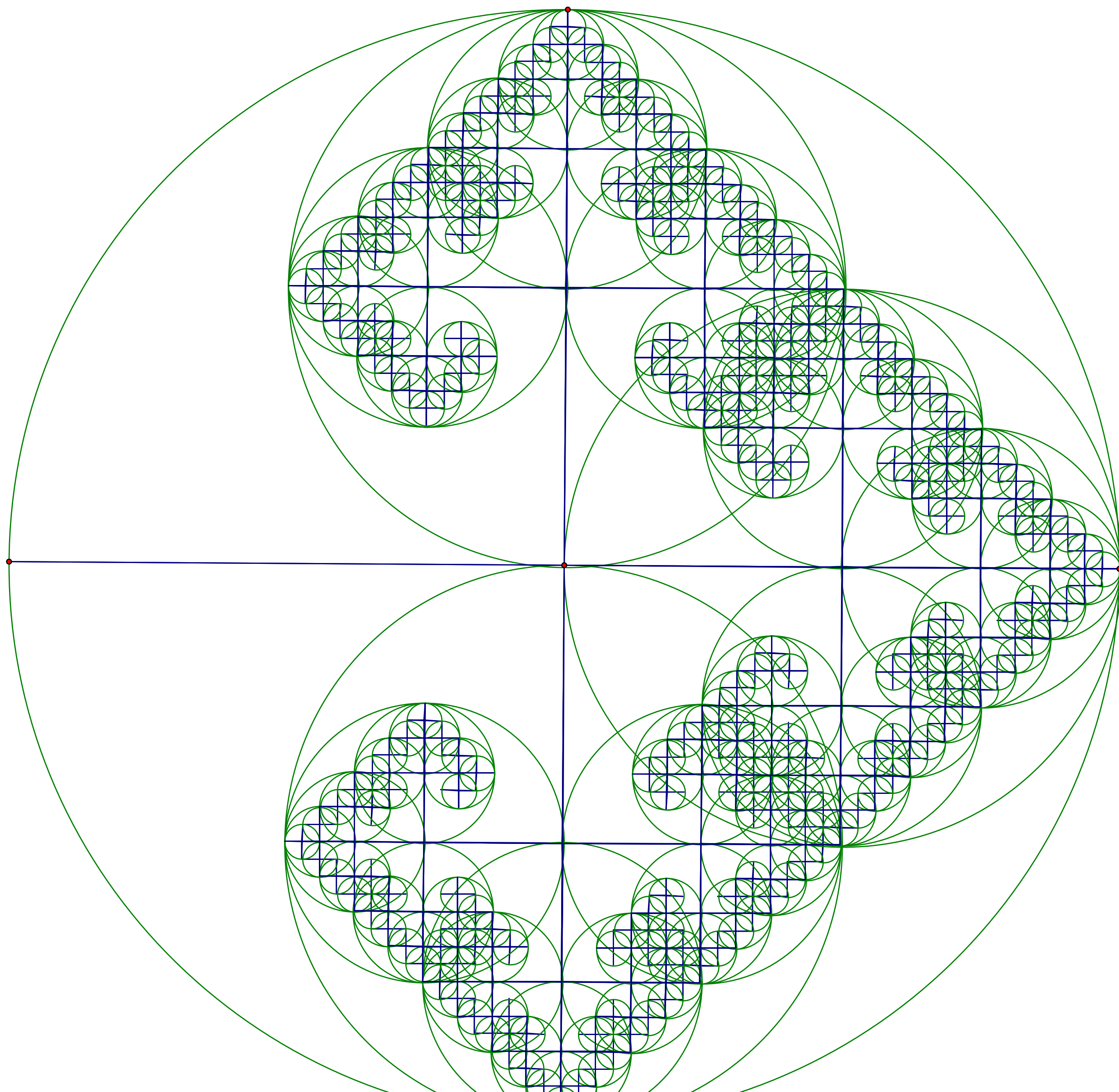


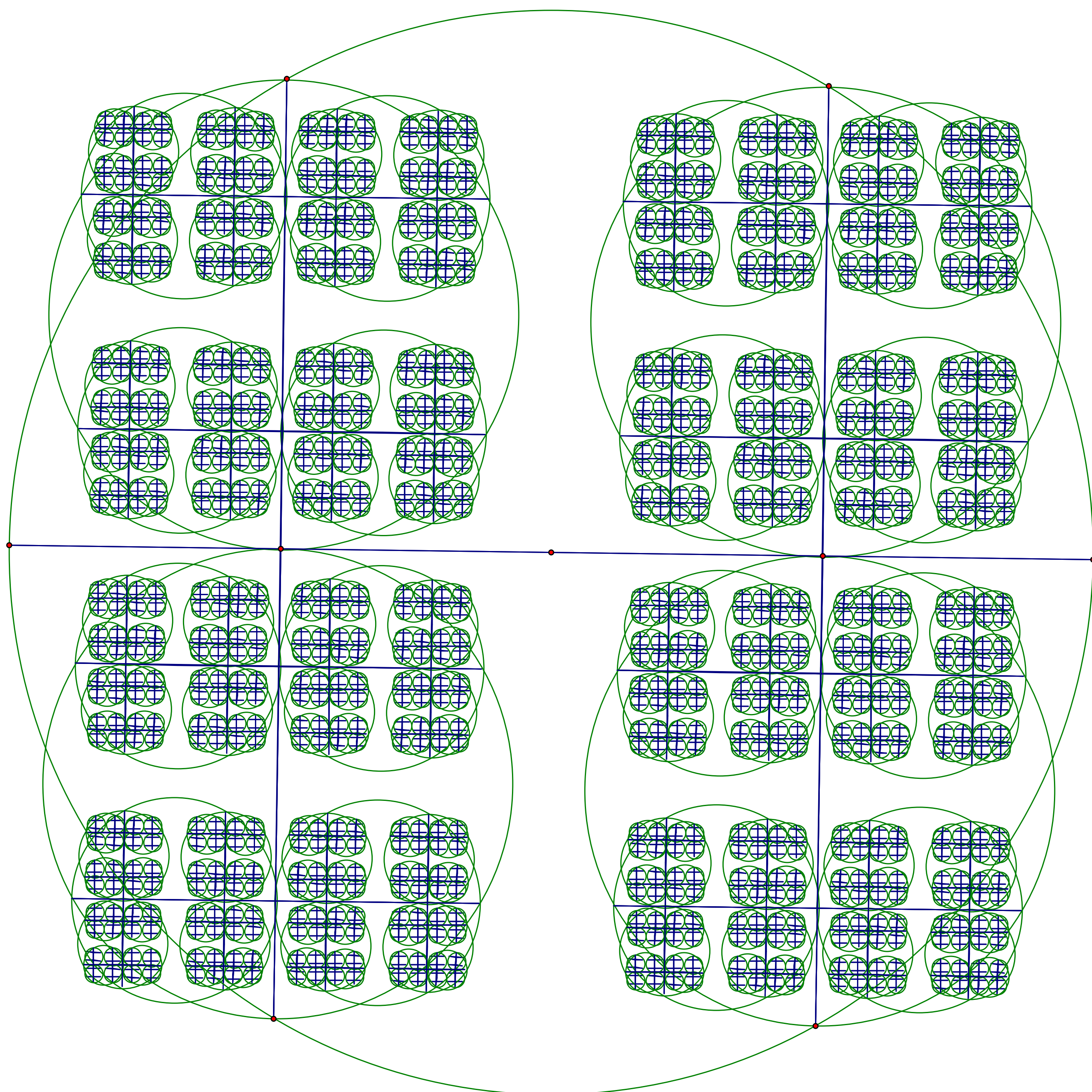


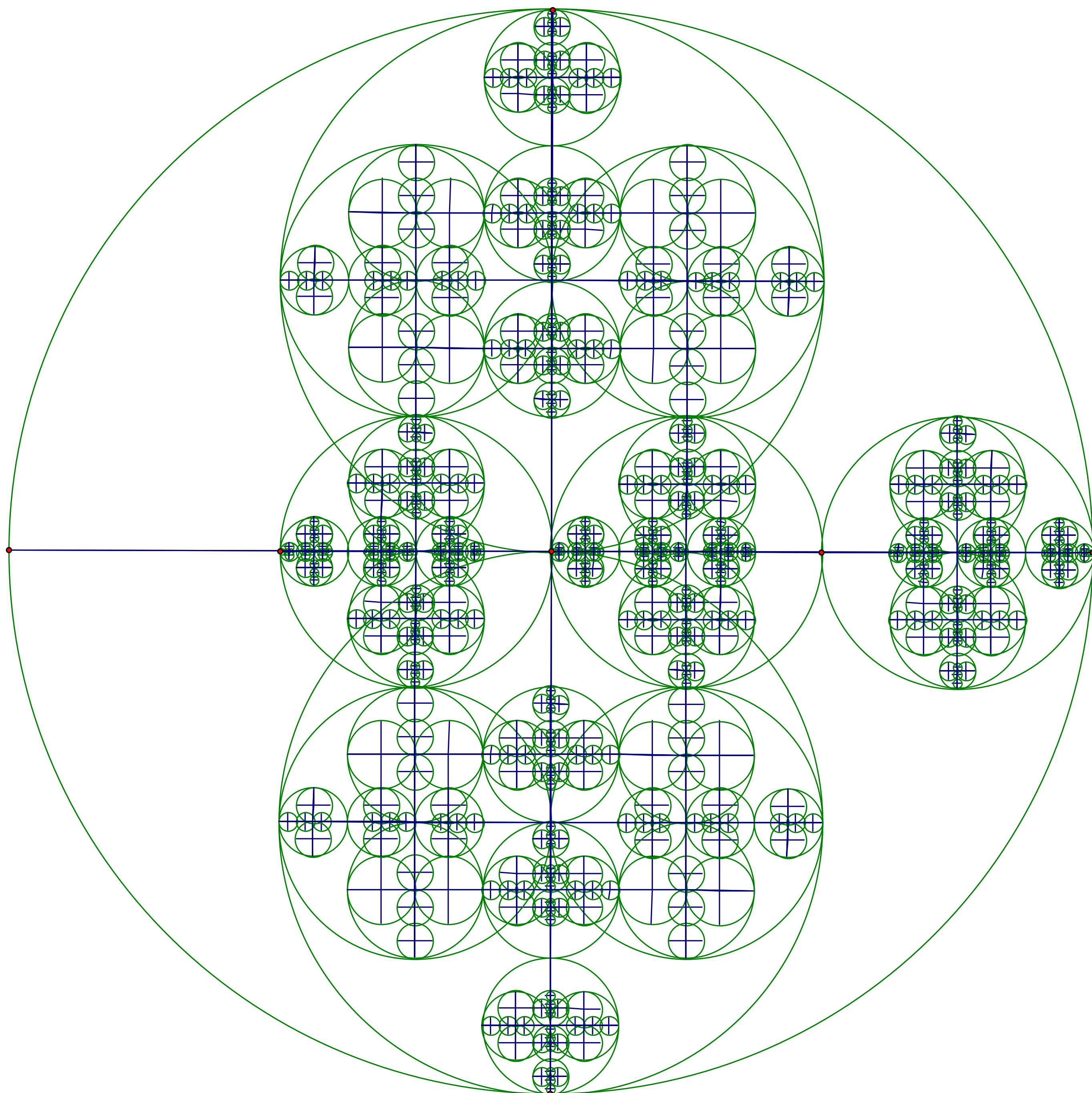


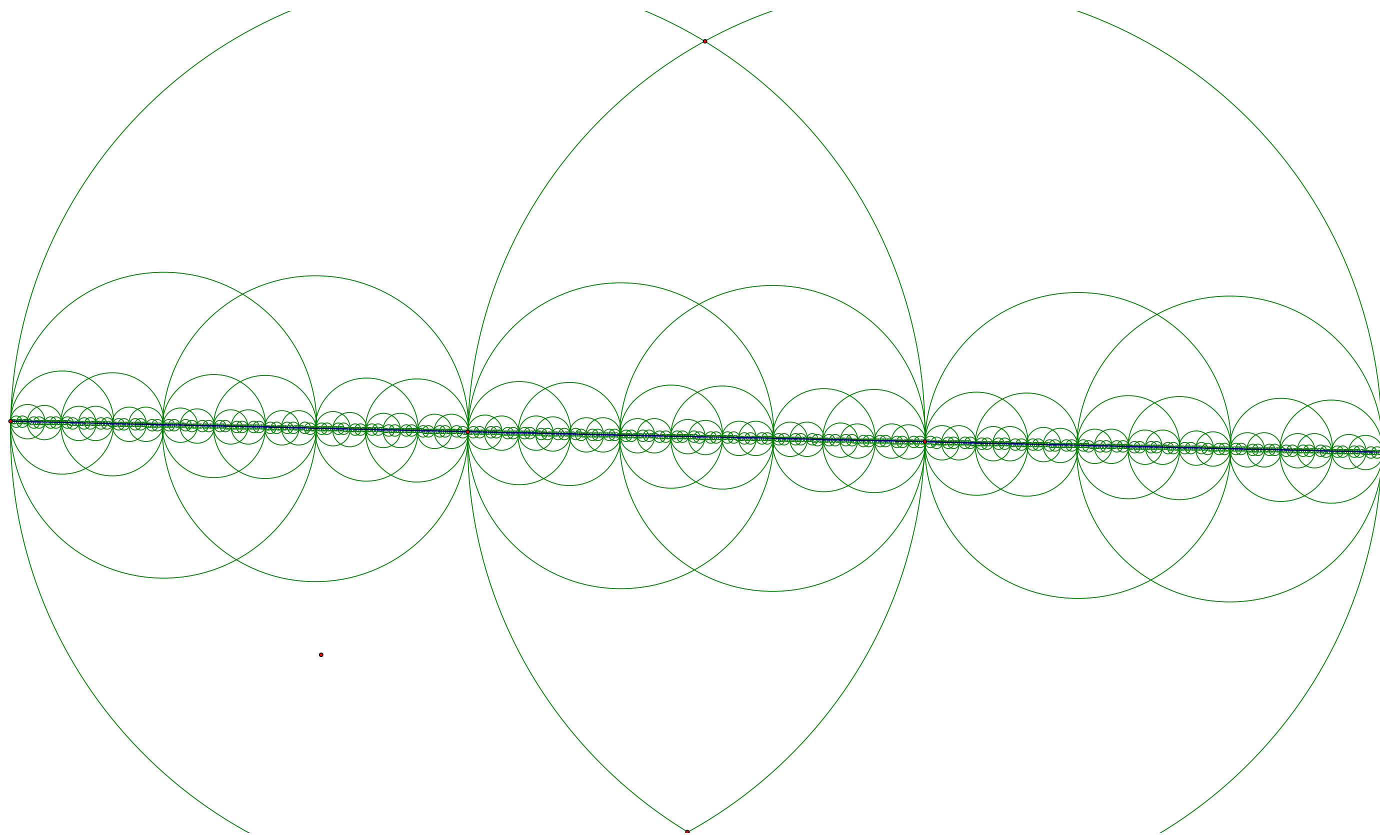


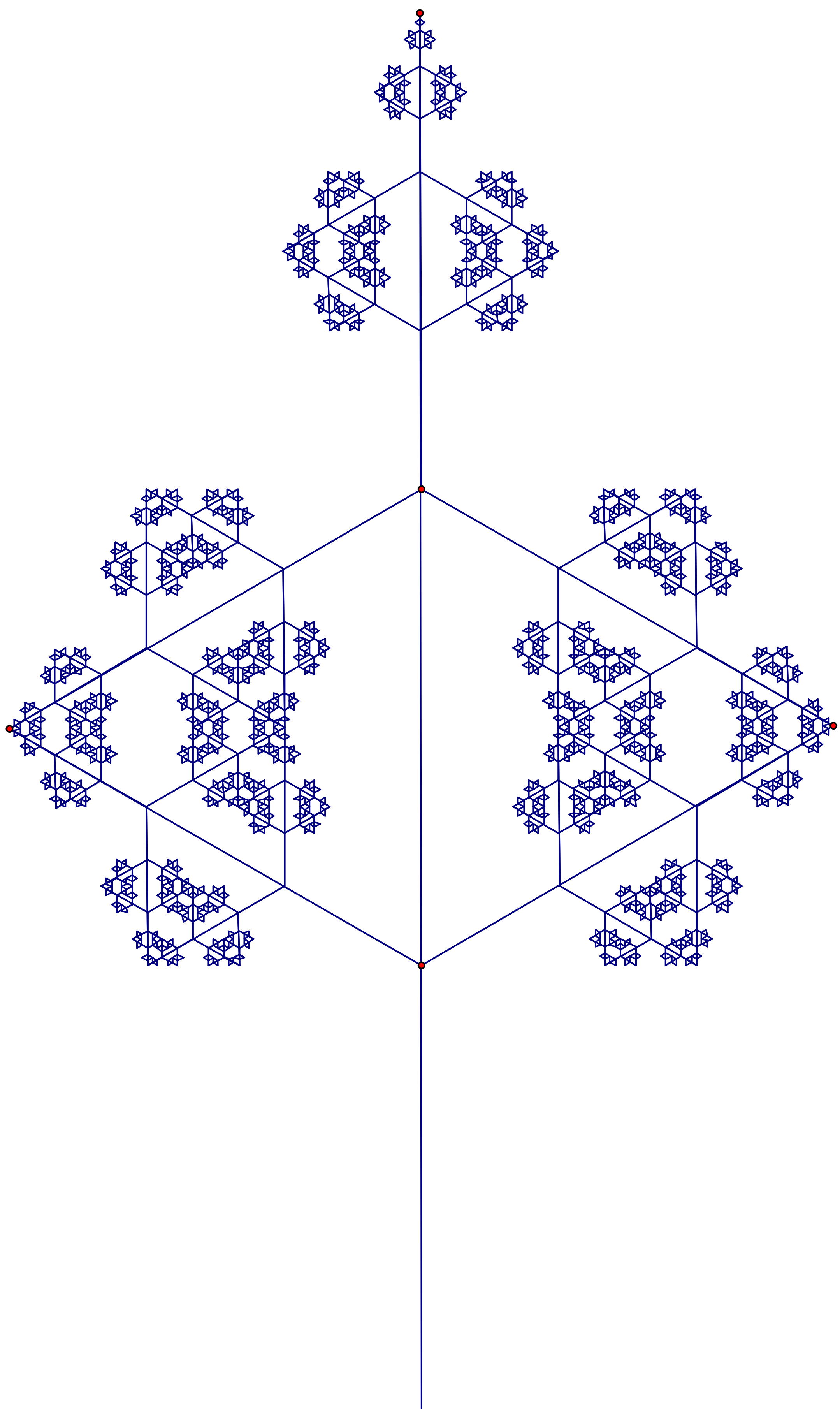


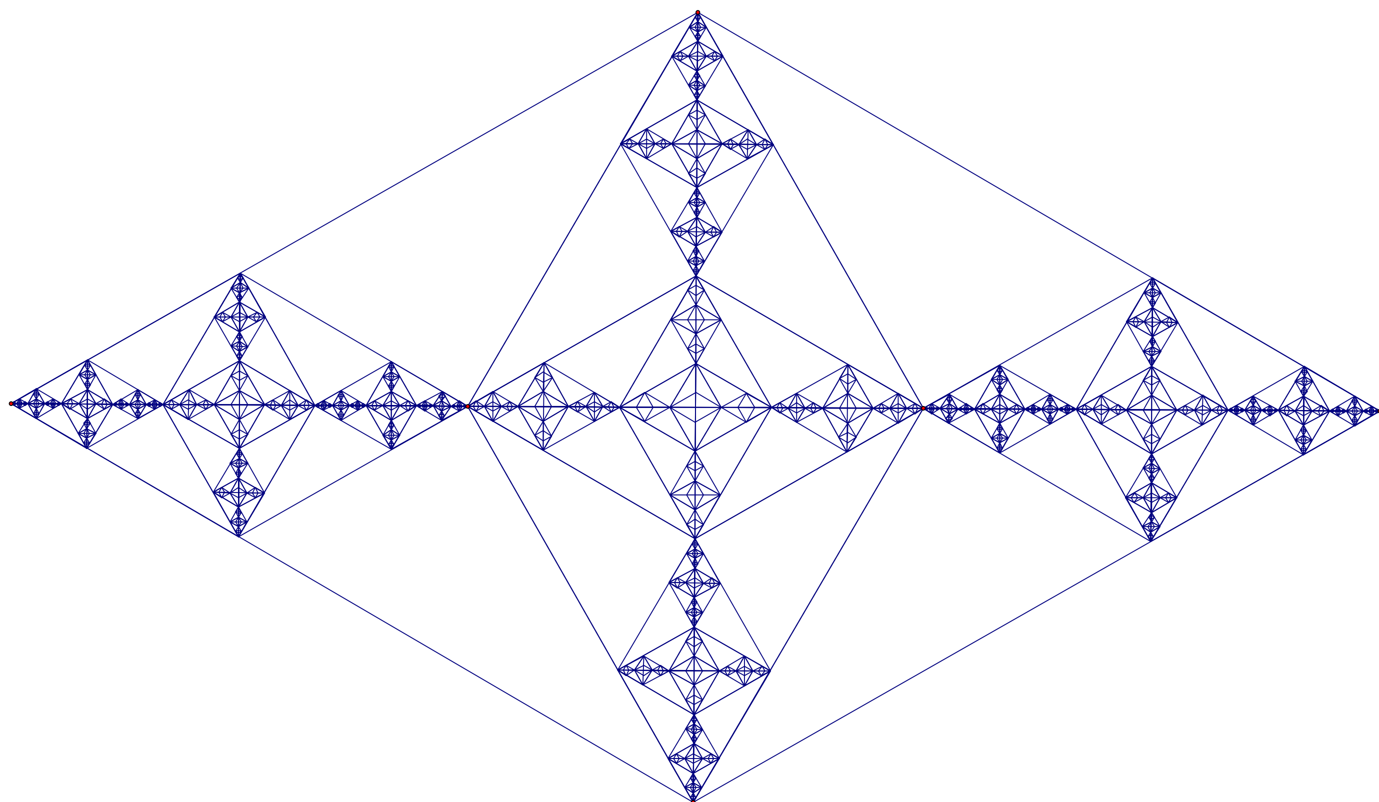


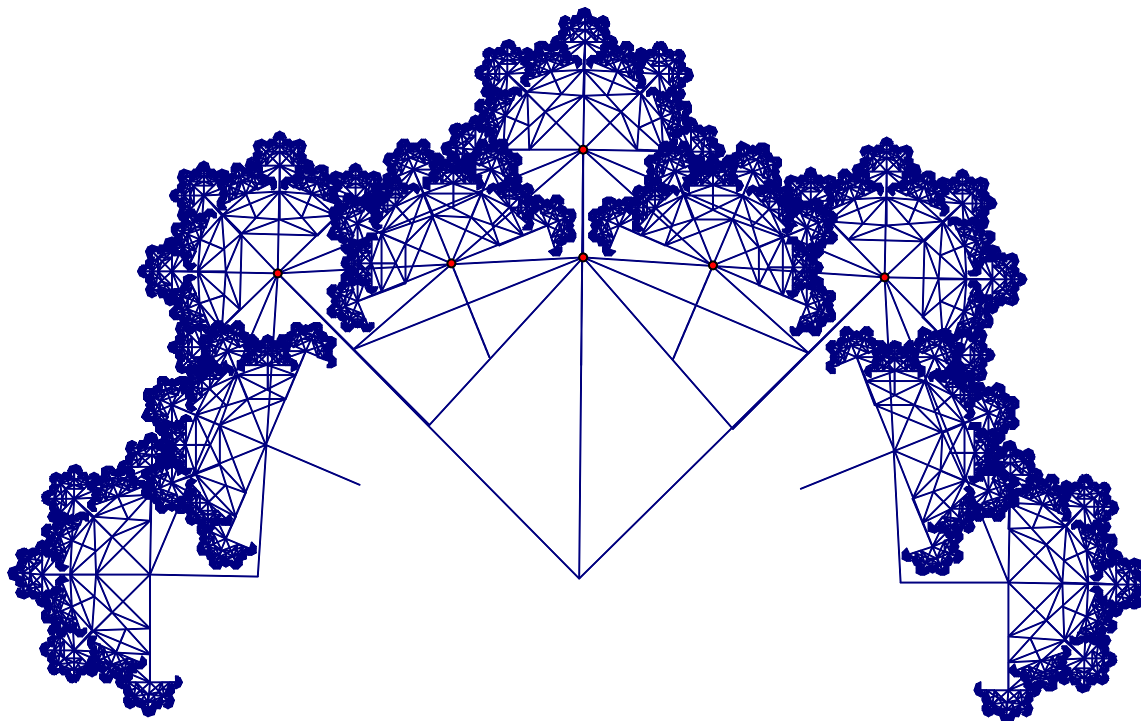


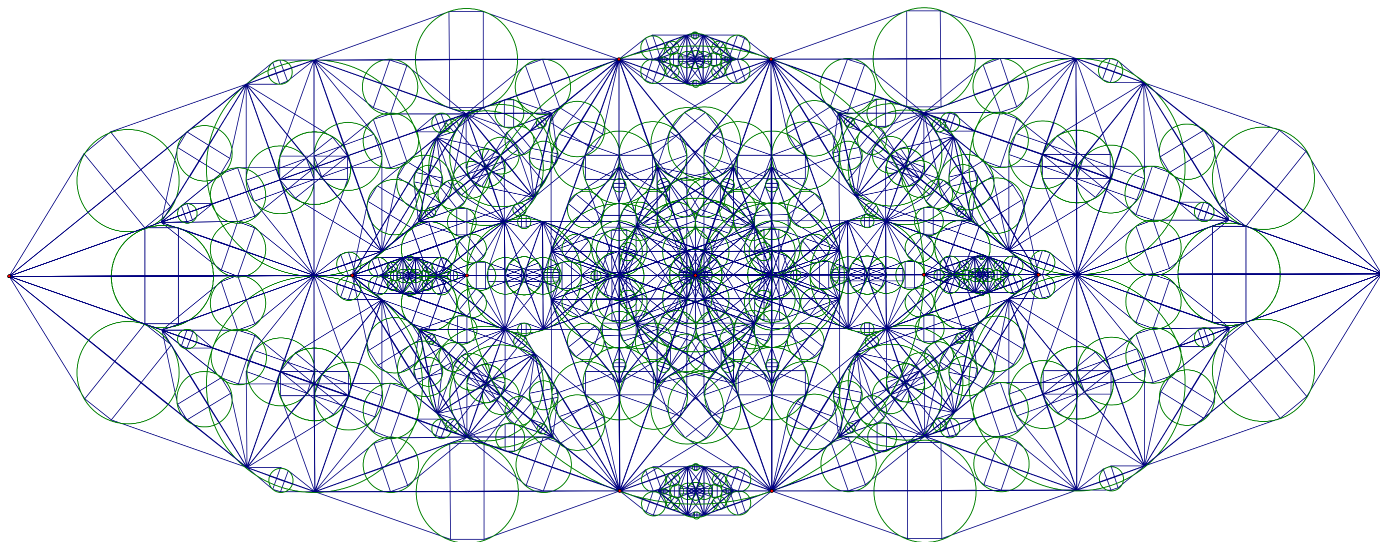


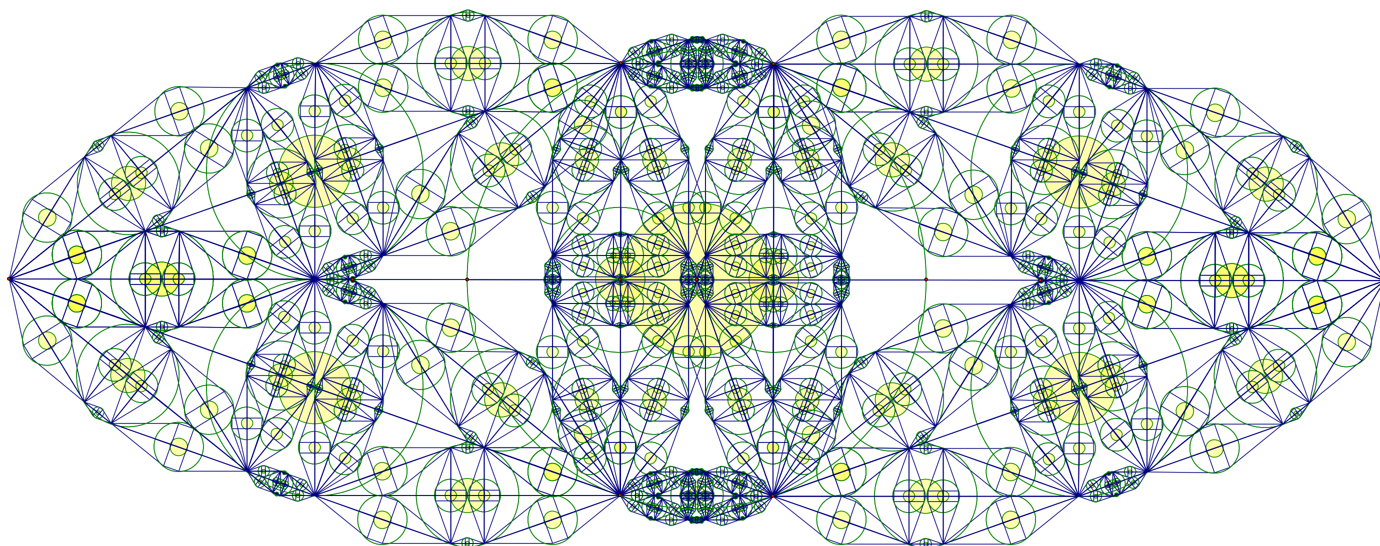


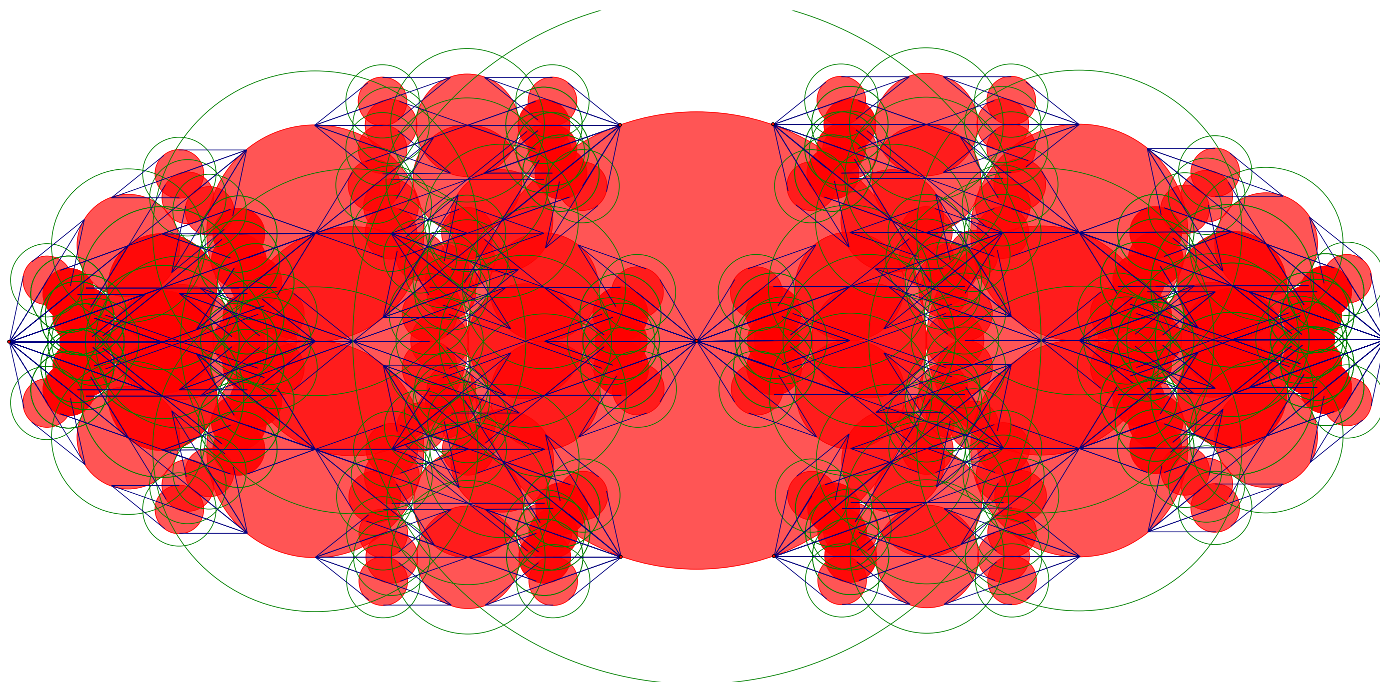


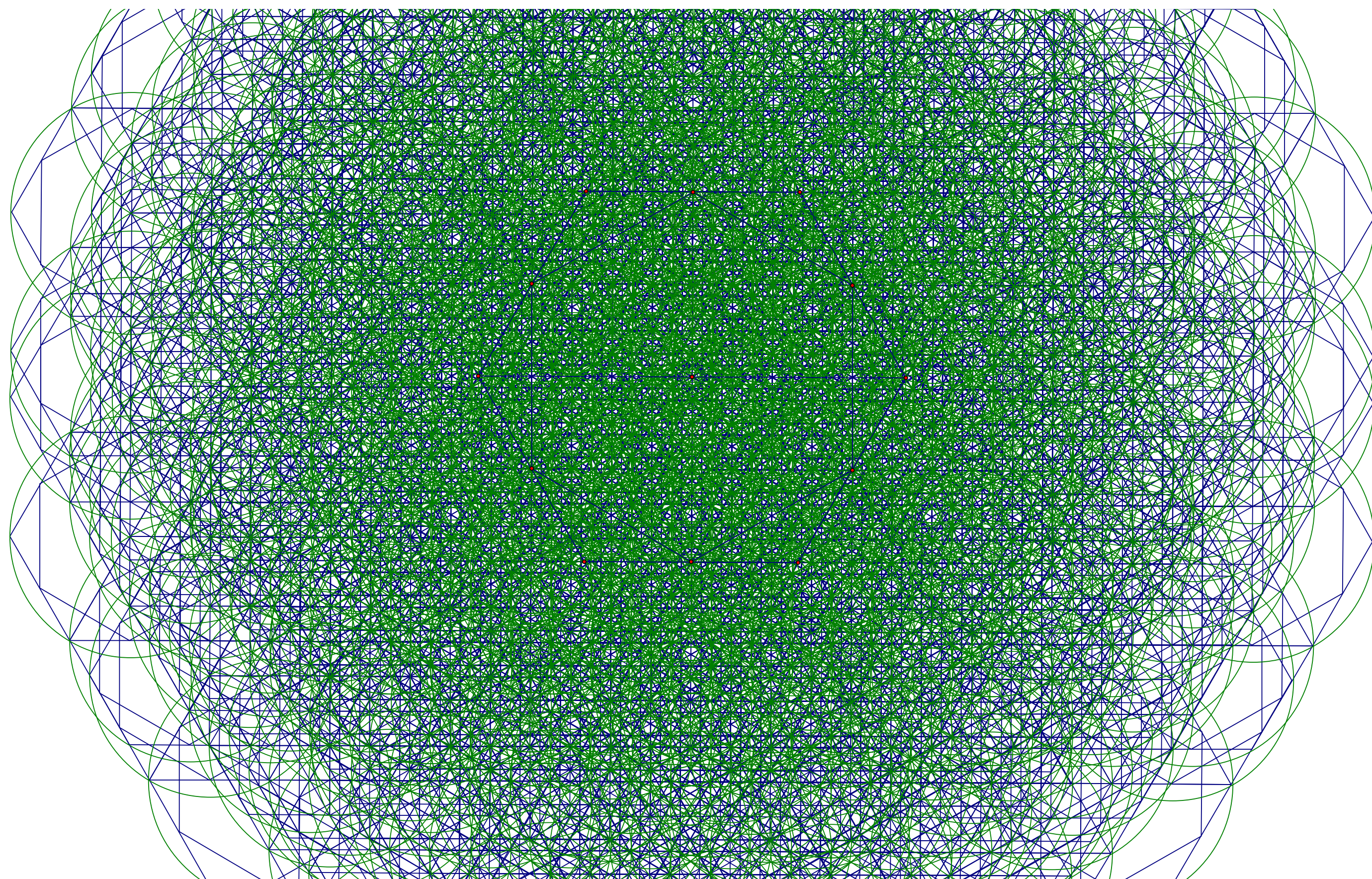


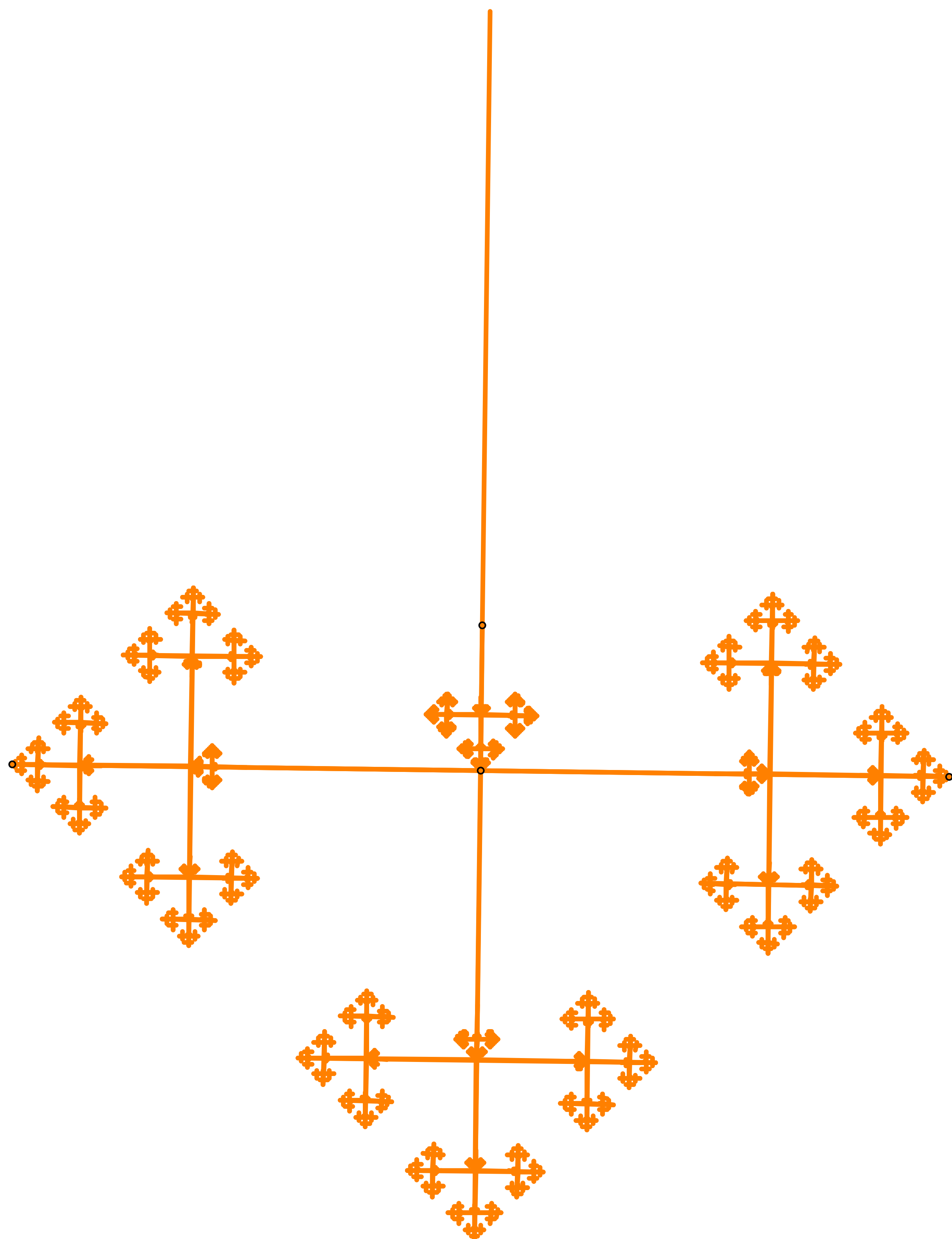


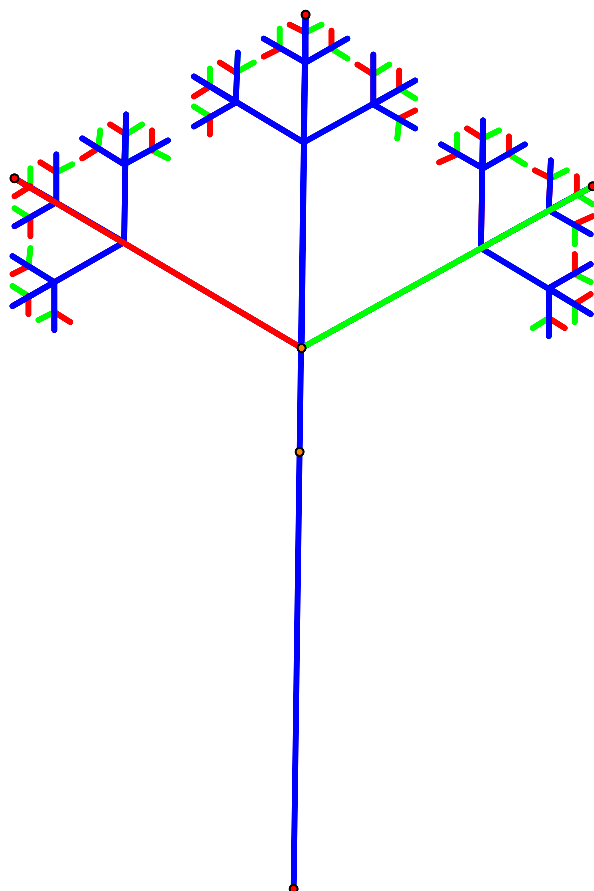


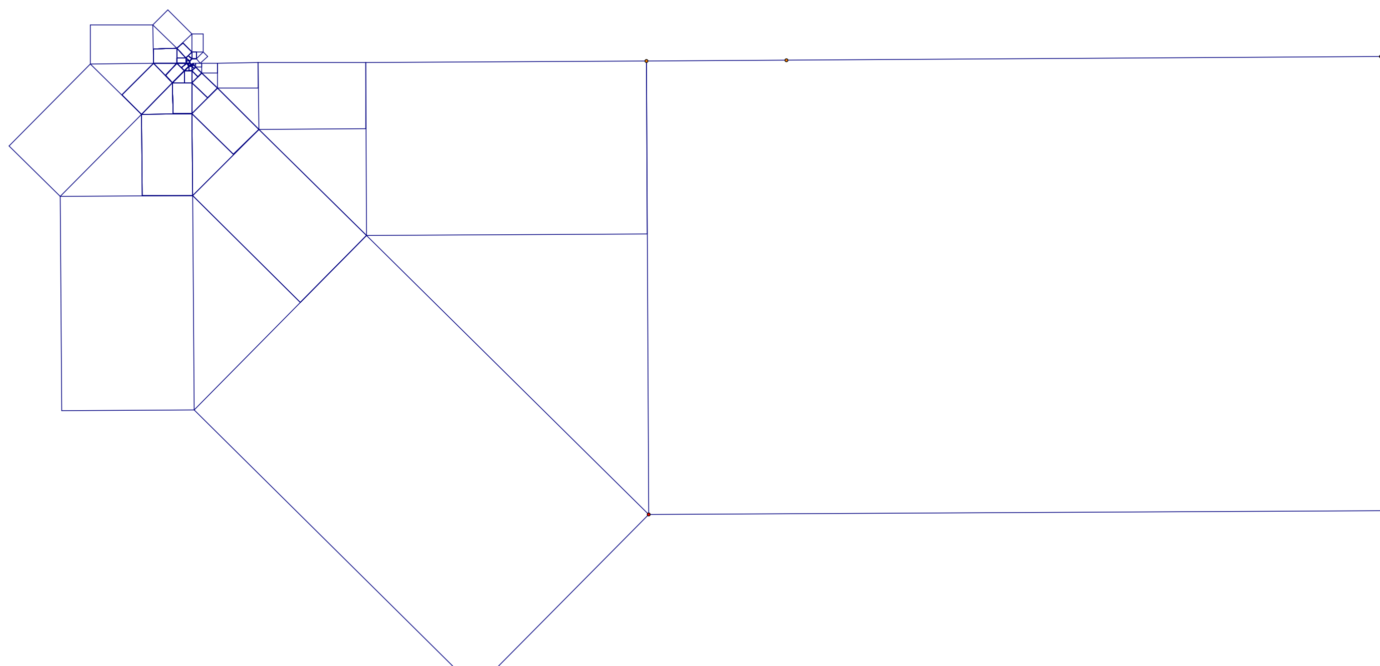






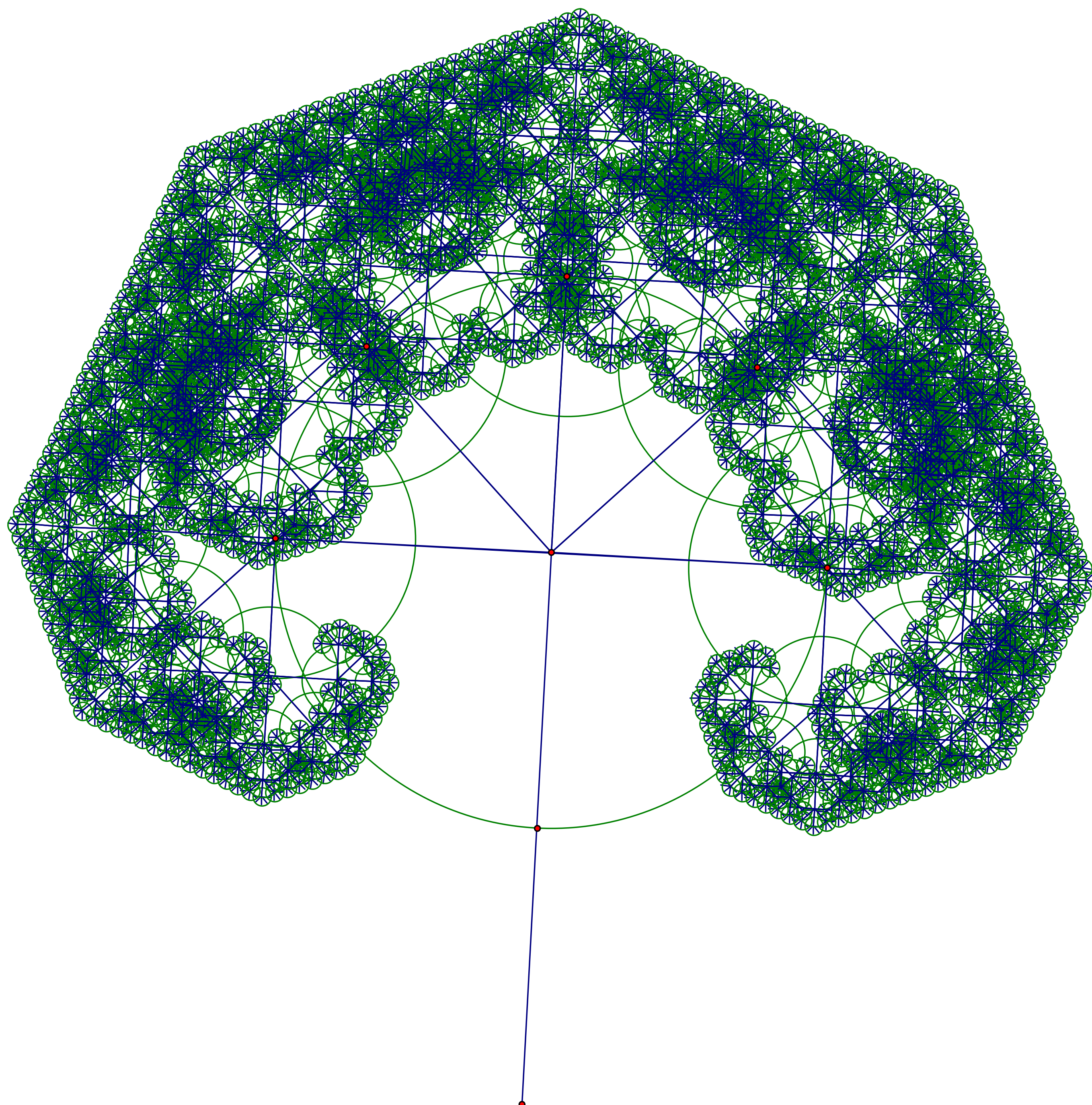


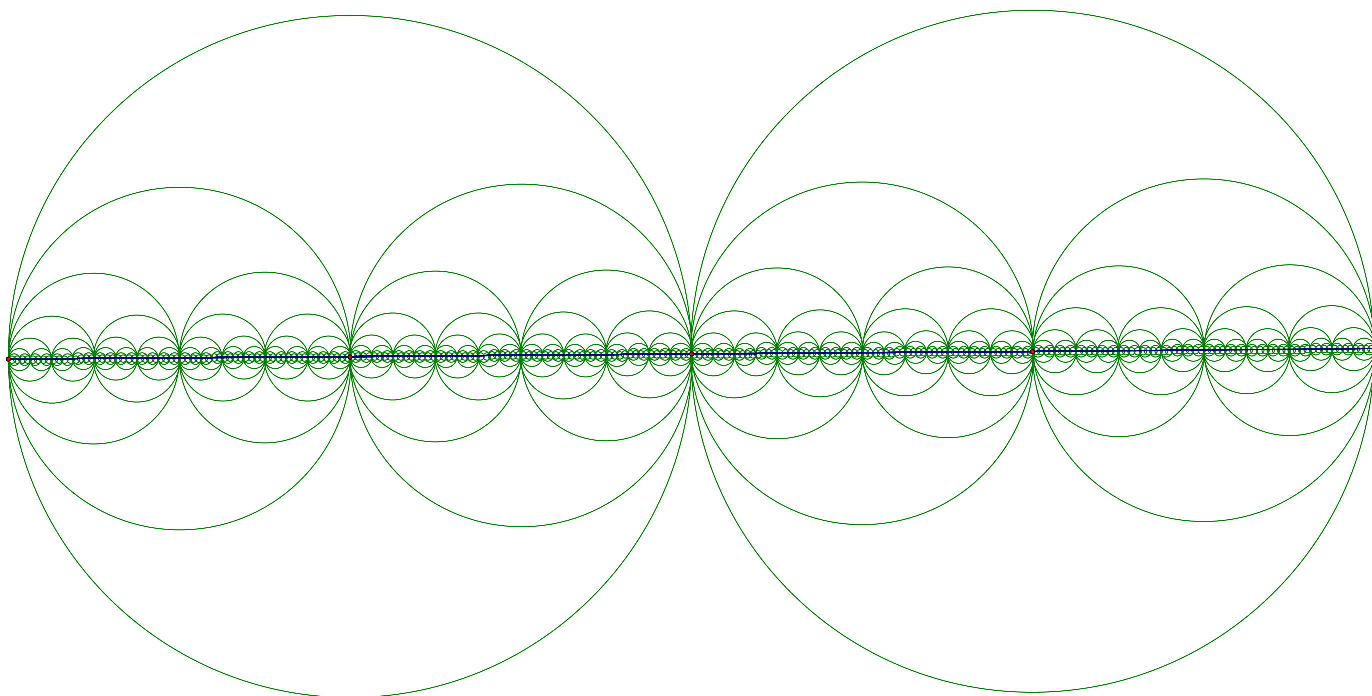


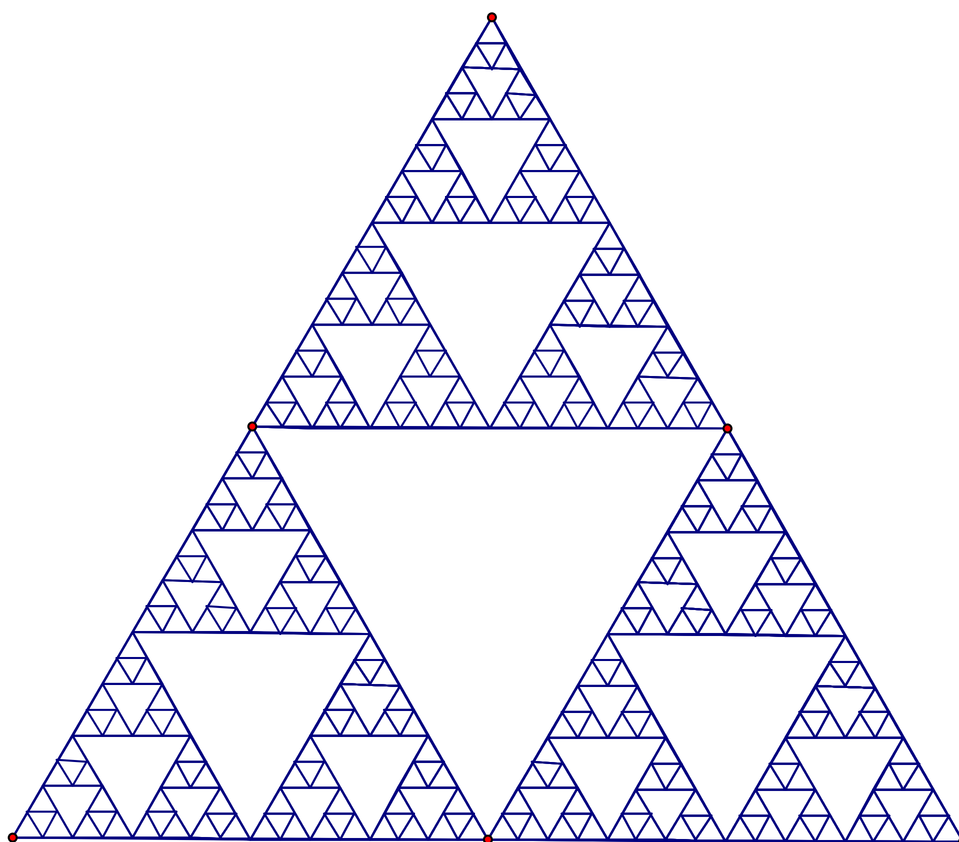


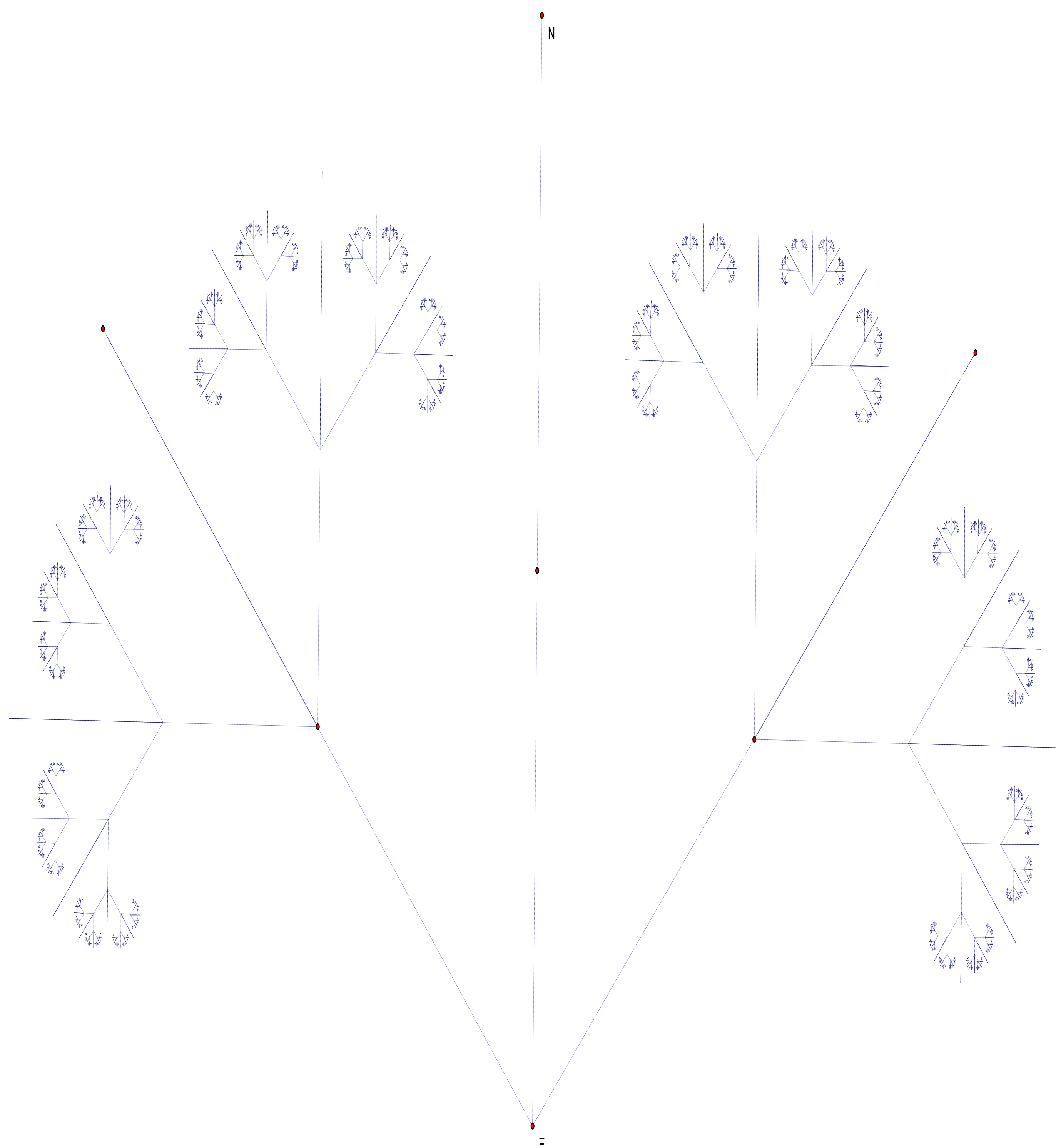
Πρώτη **Πειραματική** Συλλογή με φράκταλ, θρύμματα, μορφοκλασματικά αντικείμενα, με μόνο «περιορισμό» το πρόγραμμα κατασκευής Sketchpad.

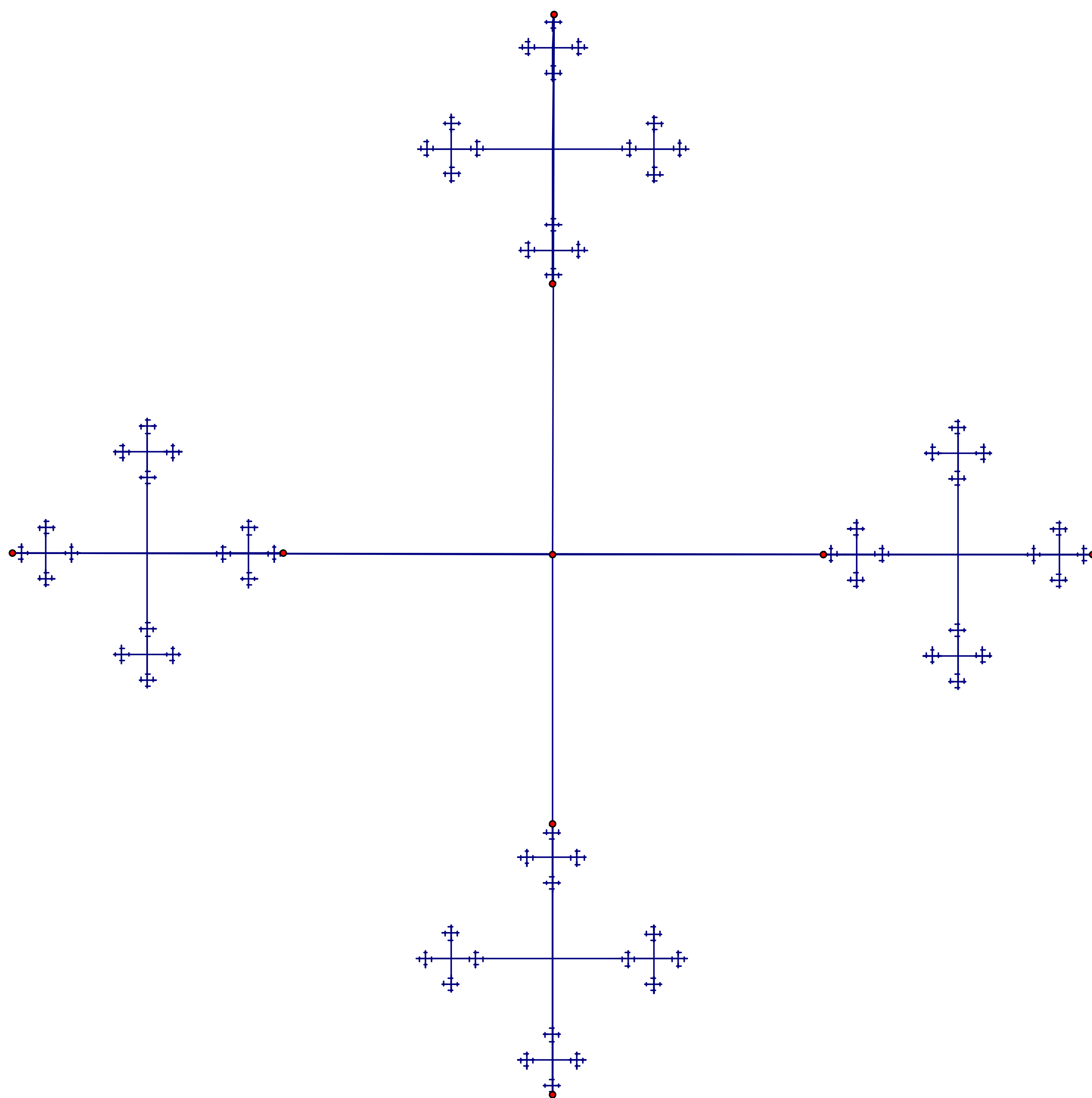
Κατασκευή : Γιάννης Π. Πλατάρος Μεσσήνη Μάρτιος 2012

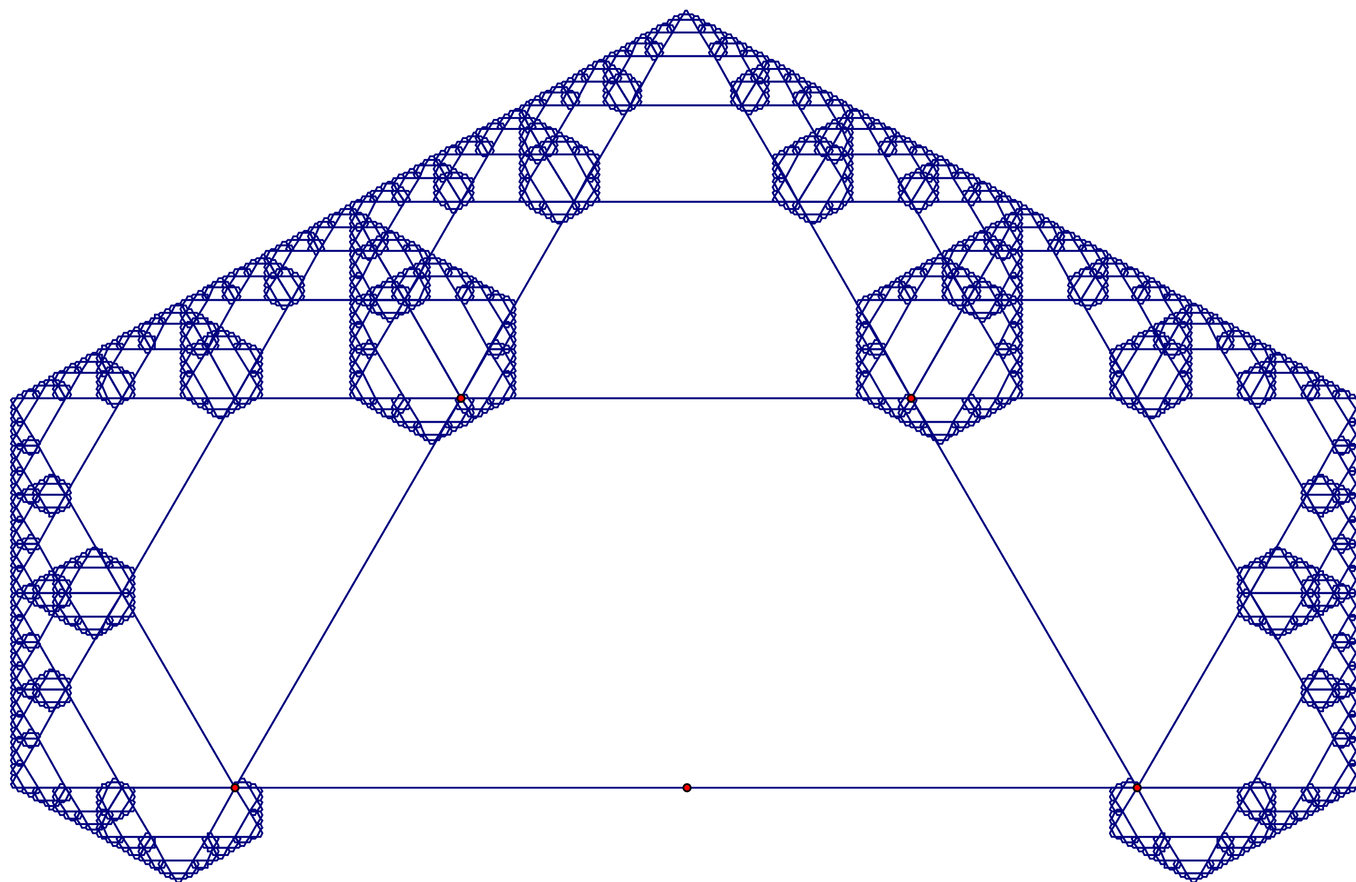


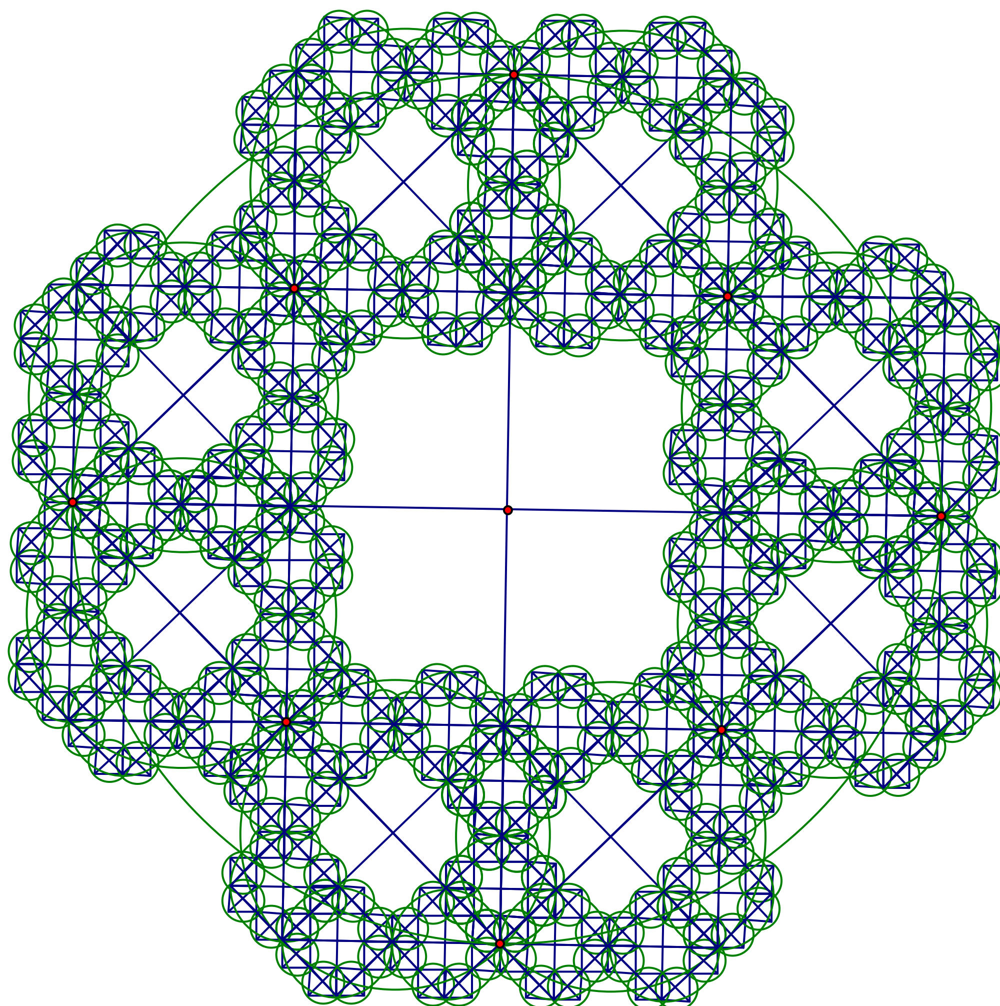


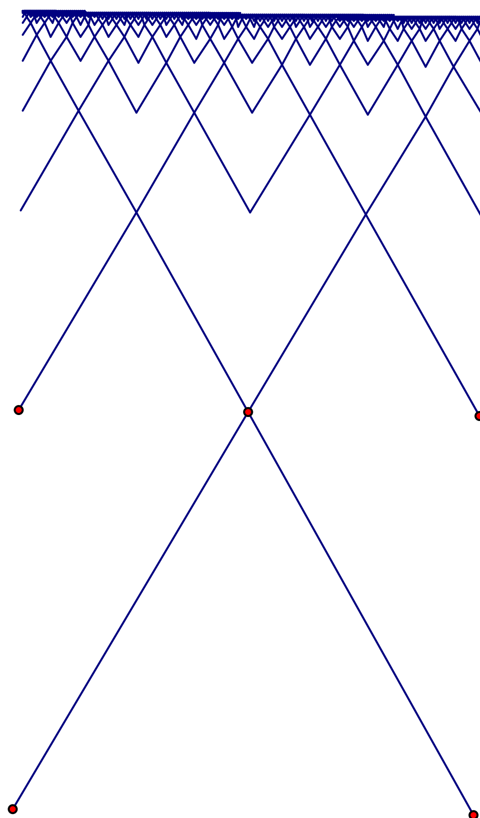


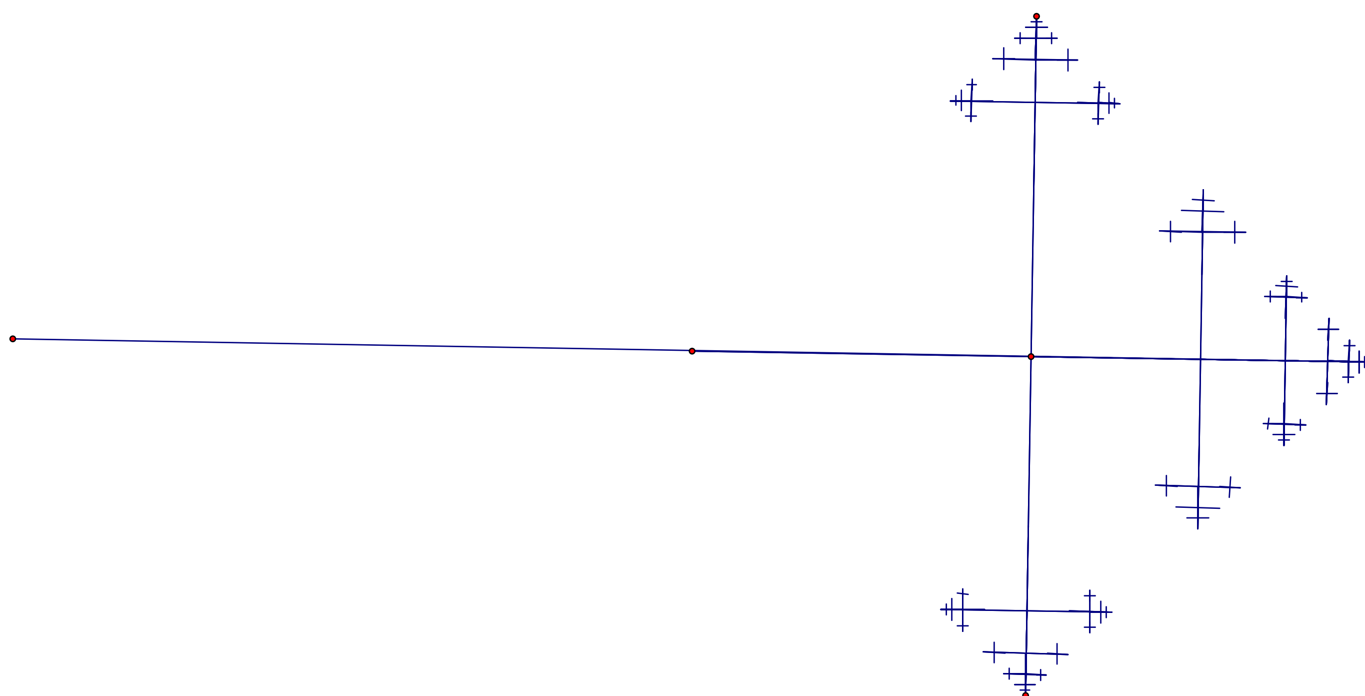

N
Ξ

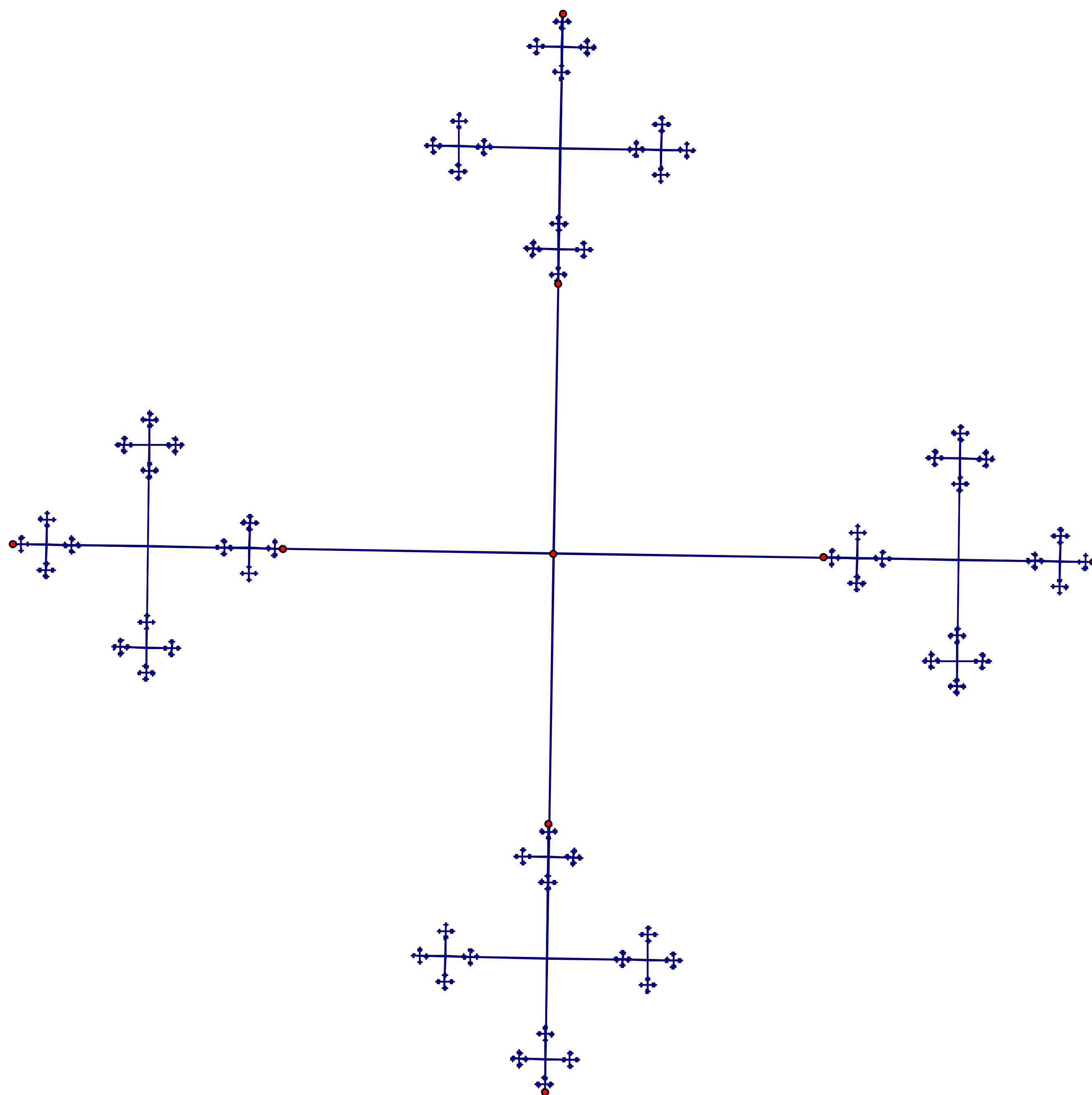


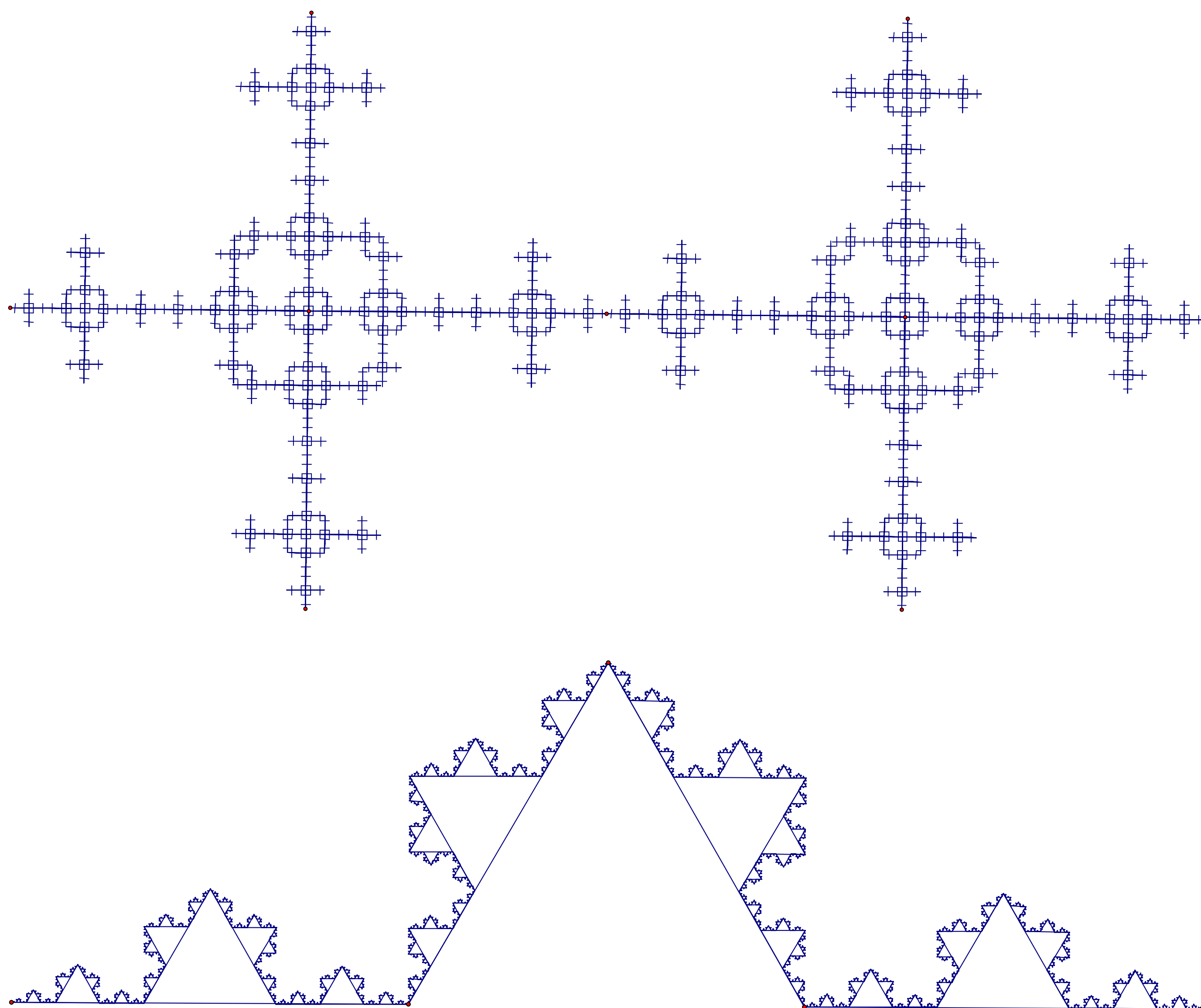


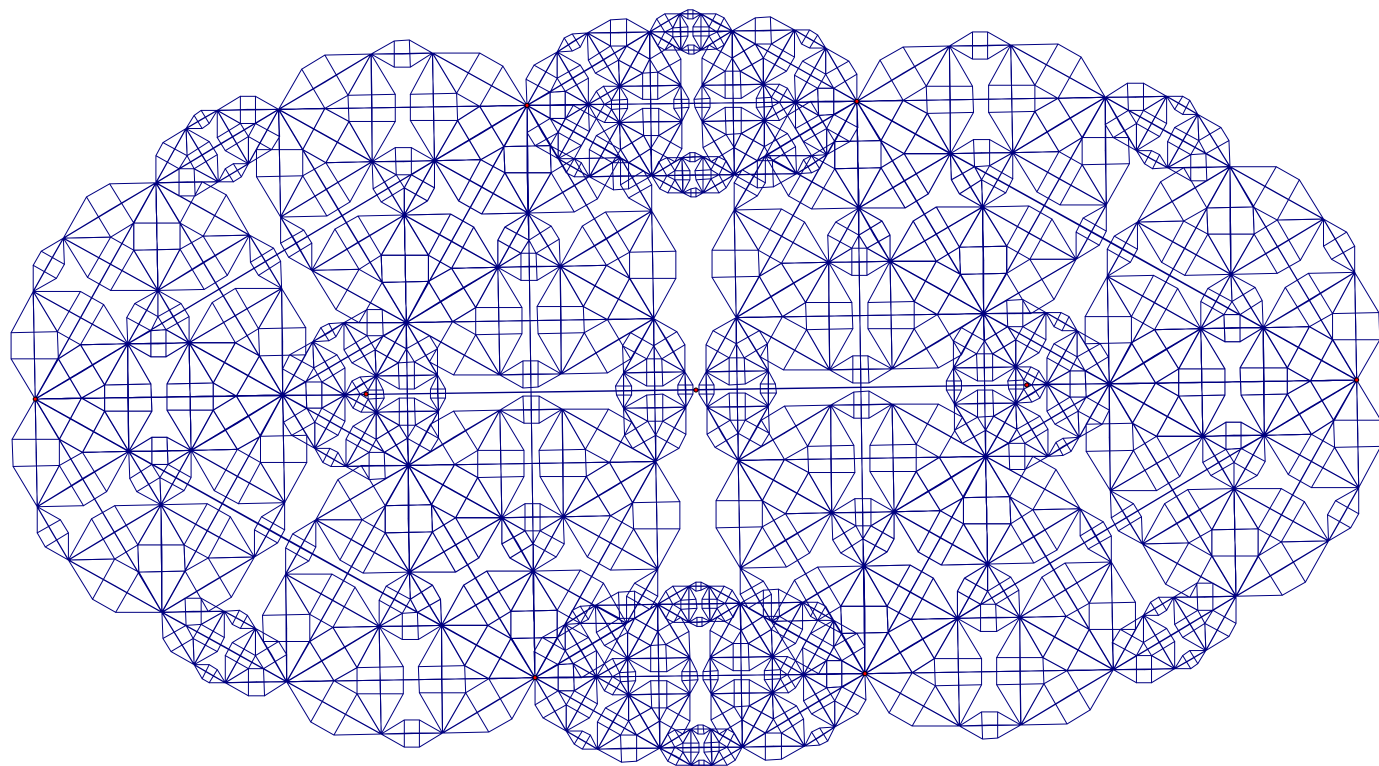


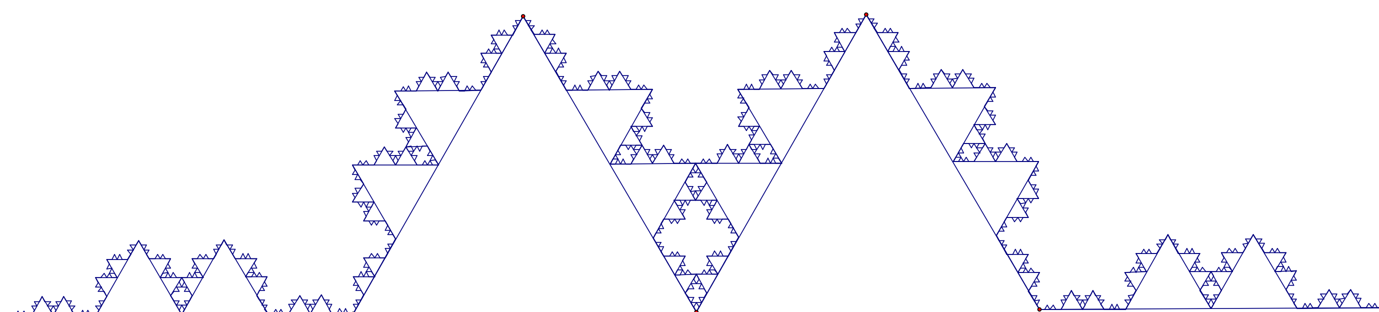


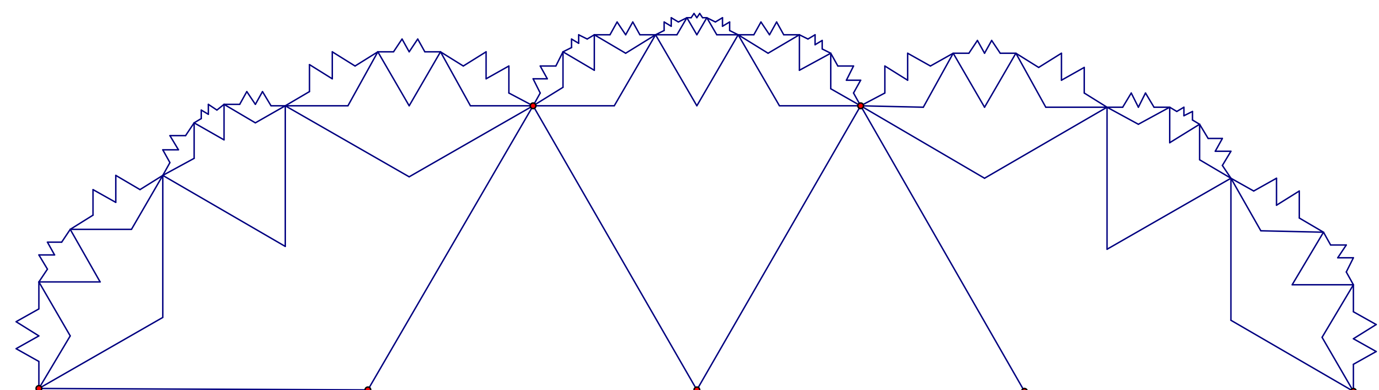


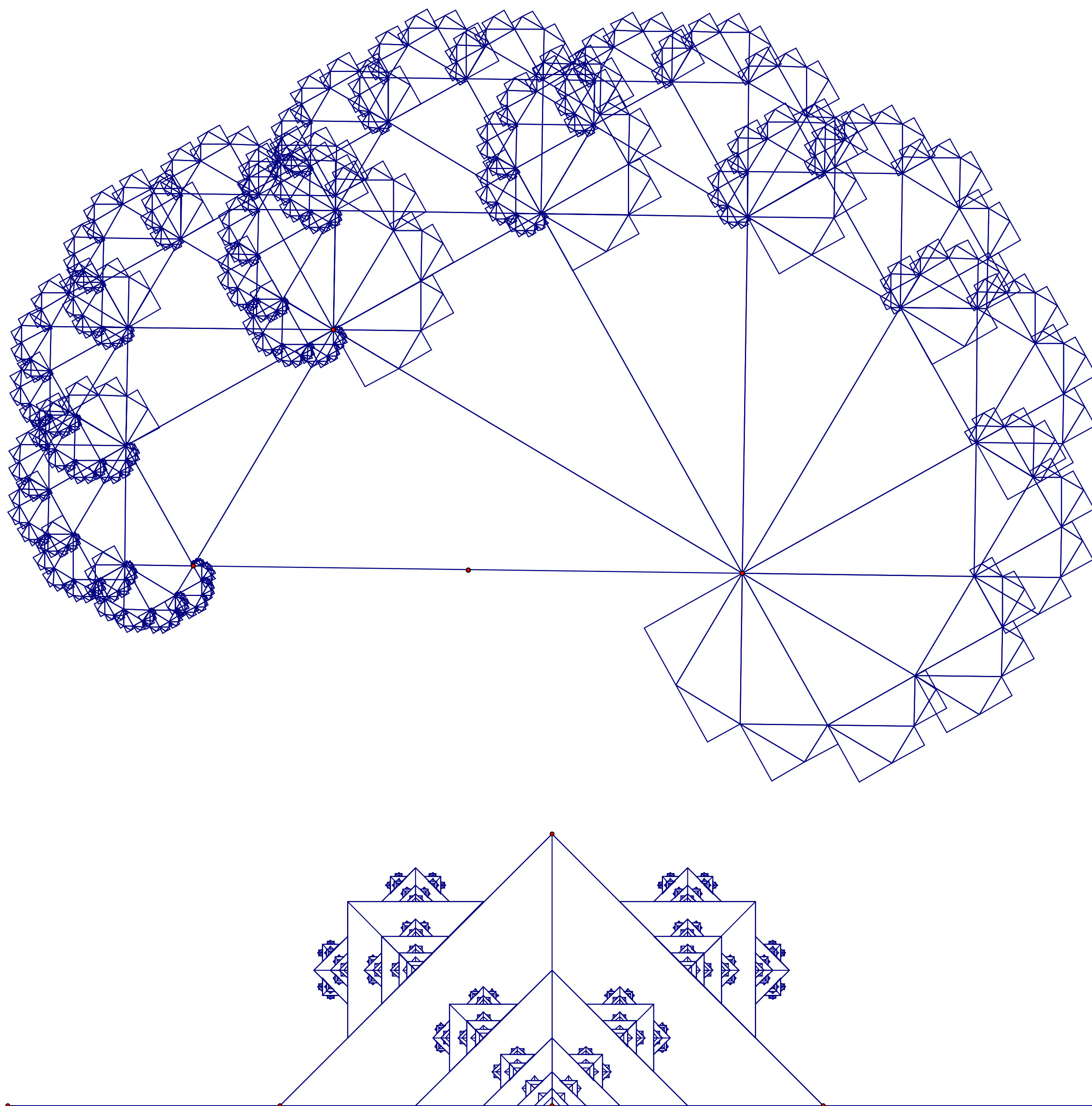


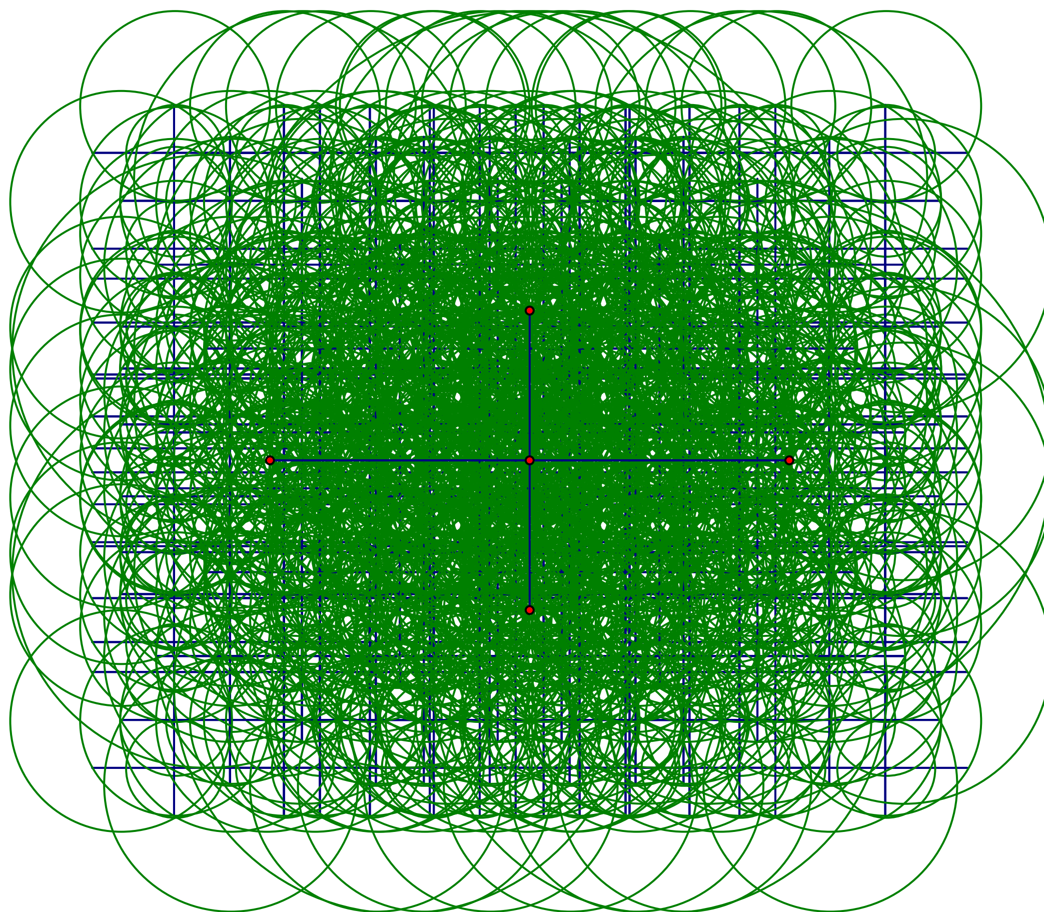


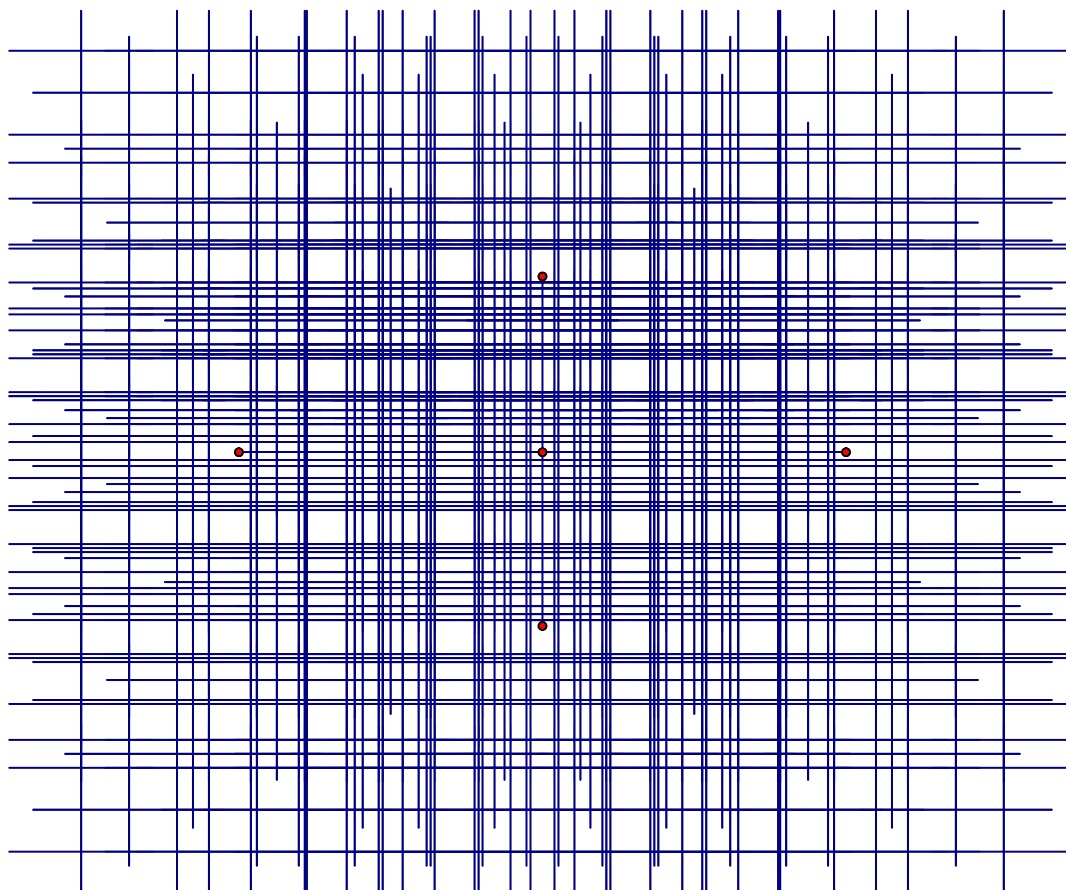


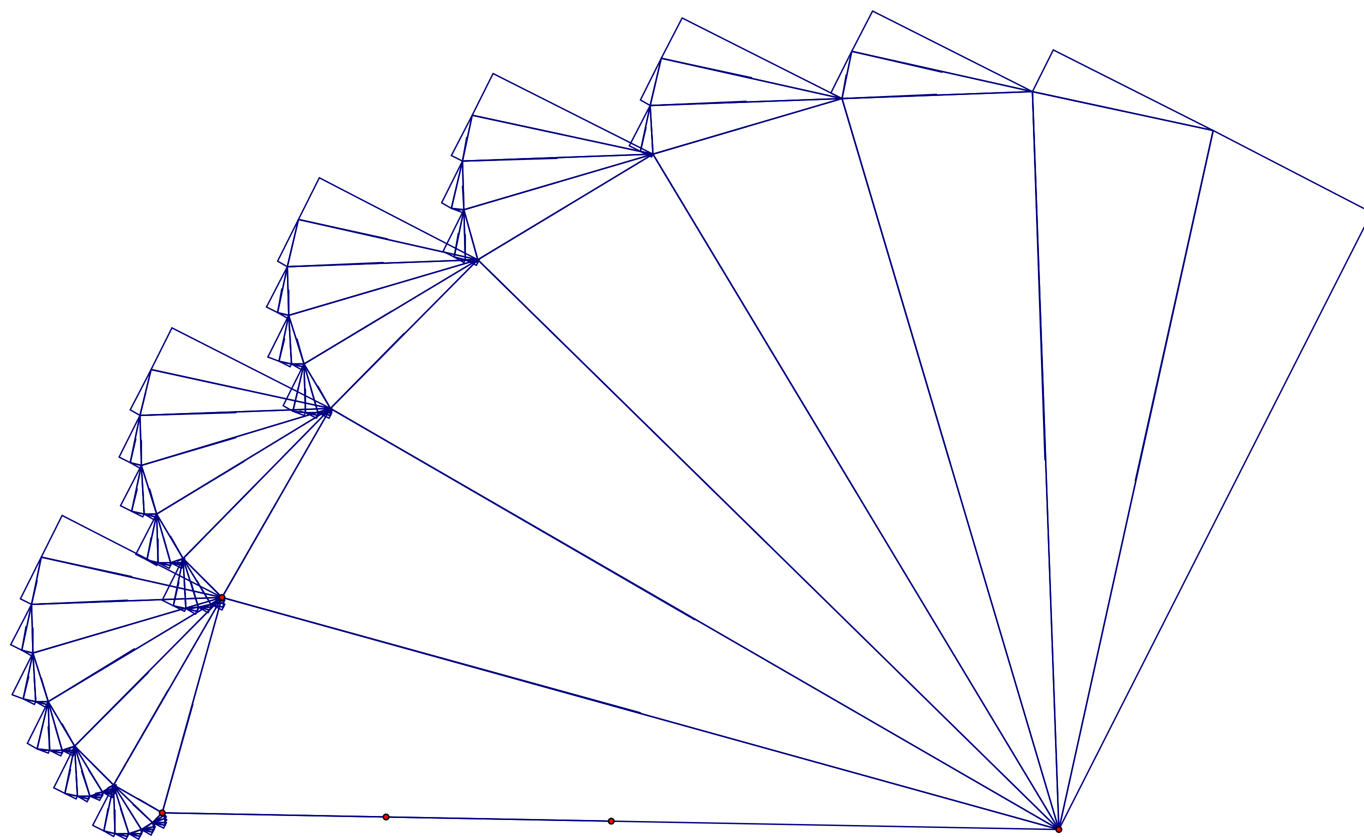


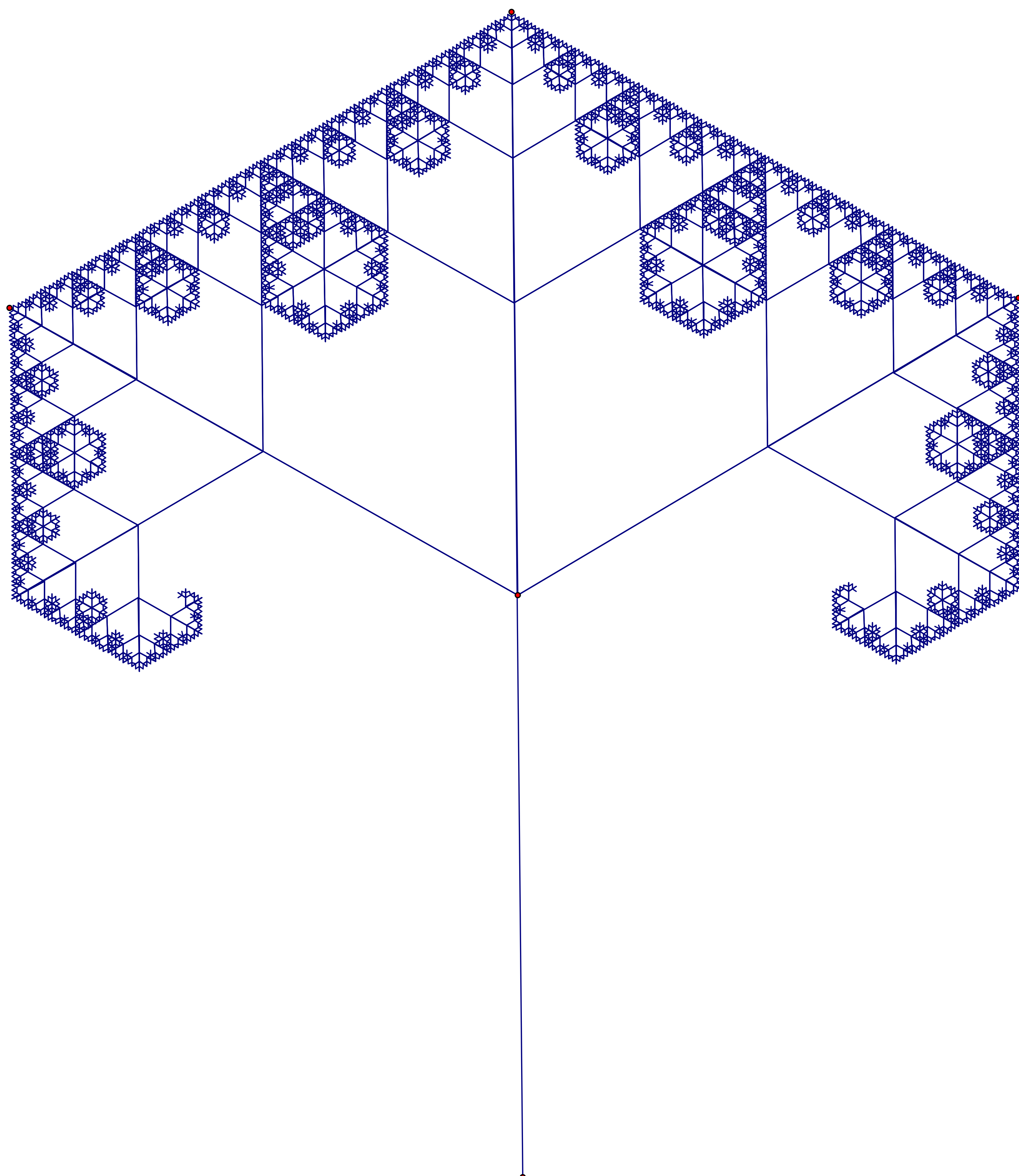


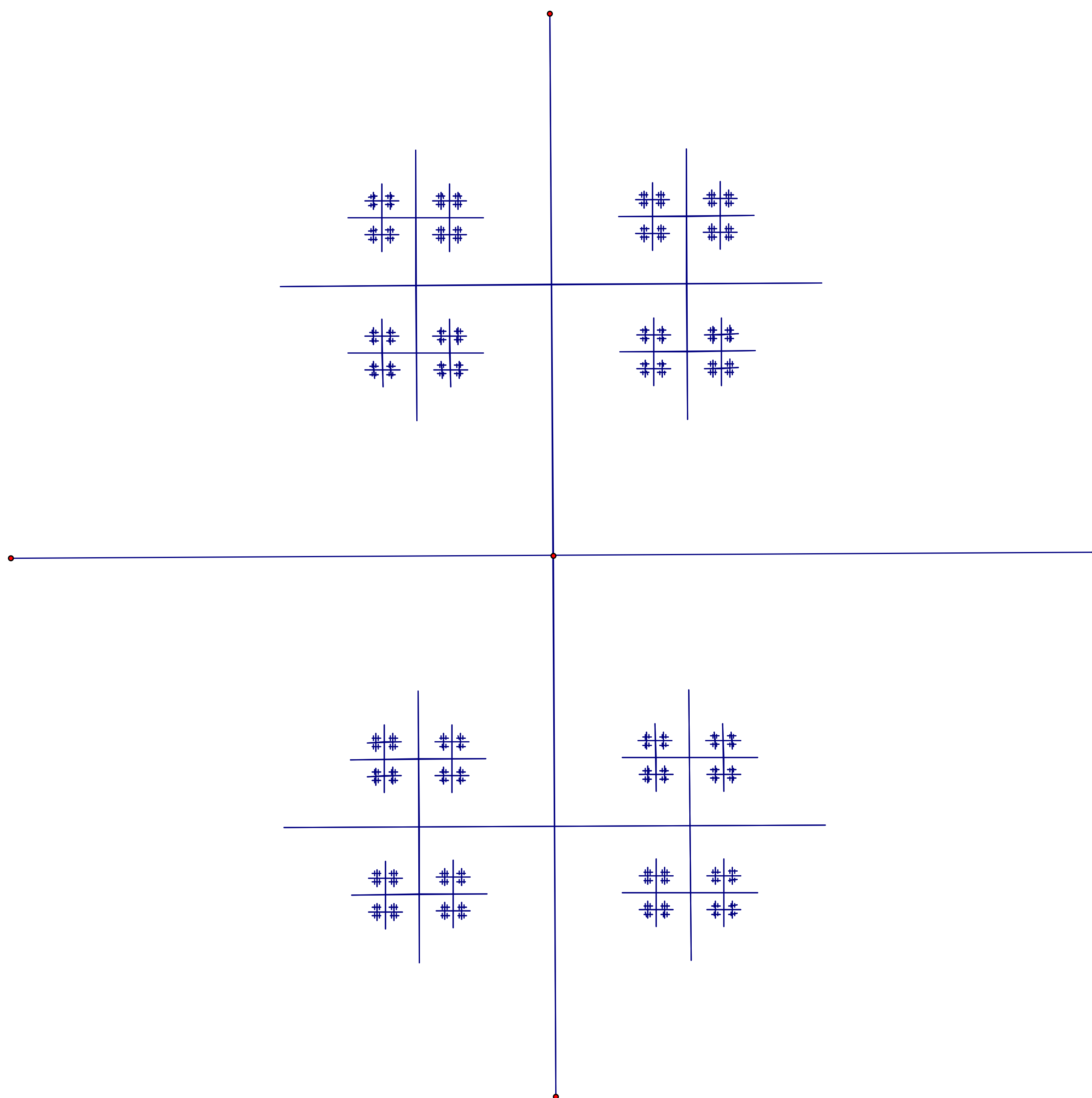


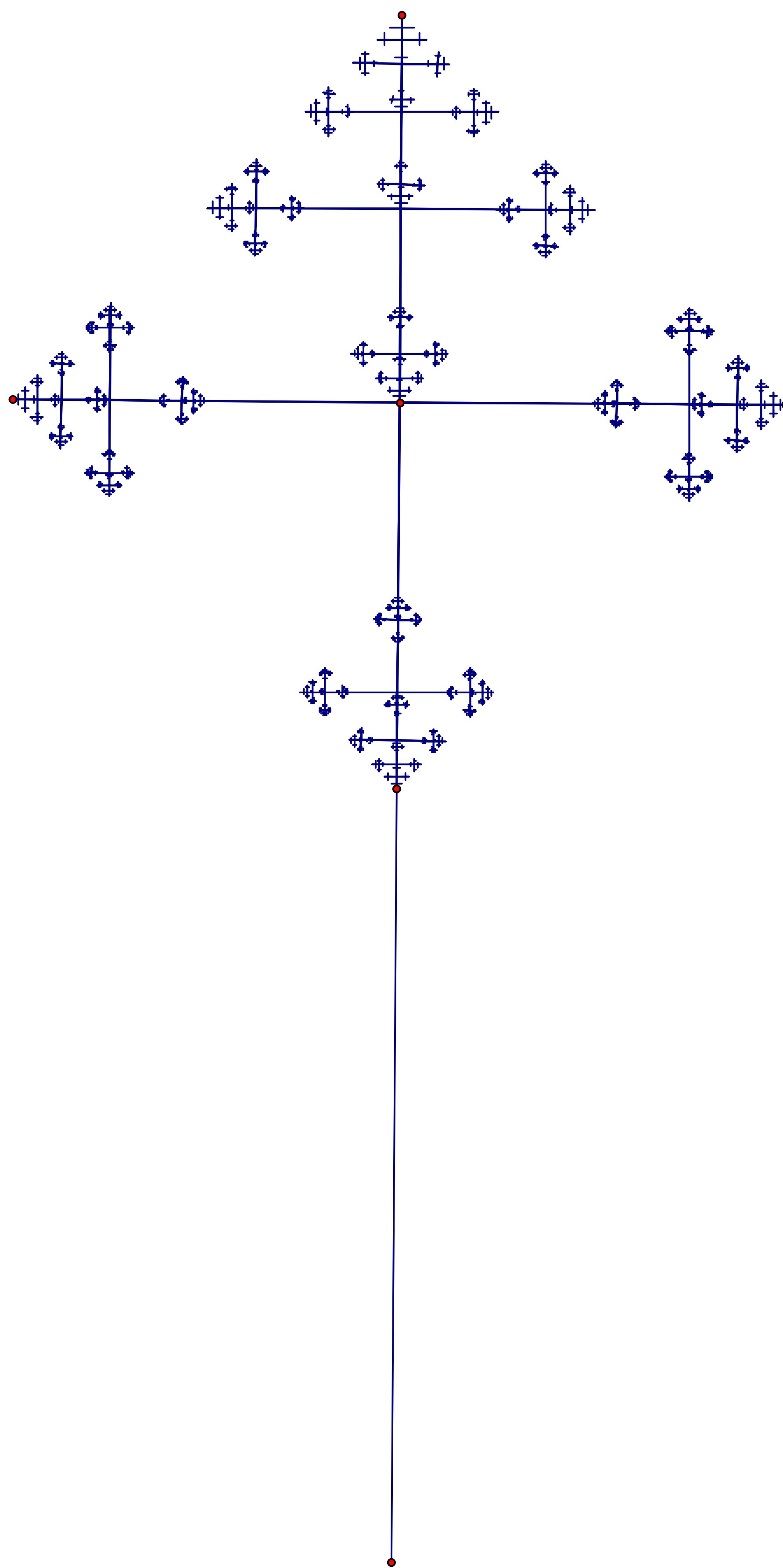


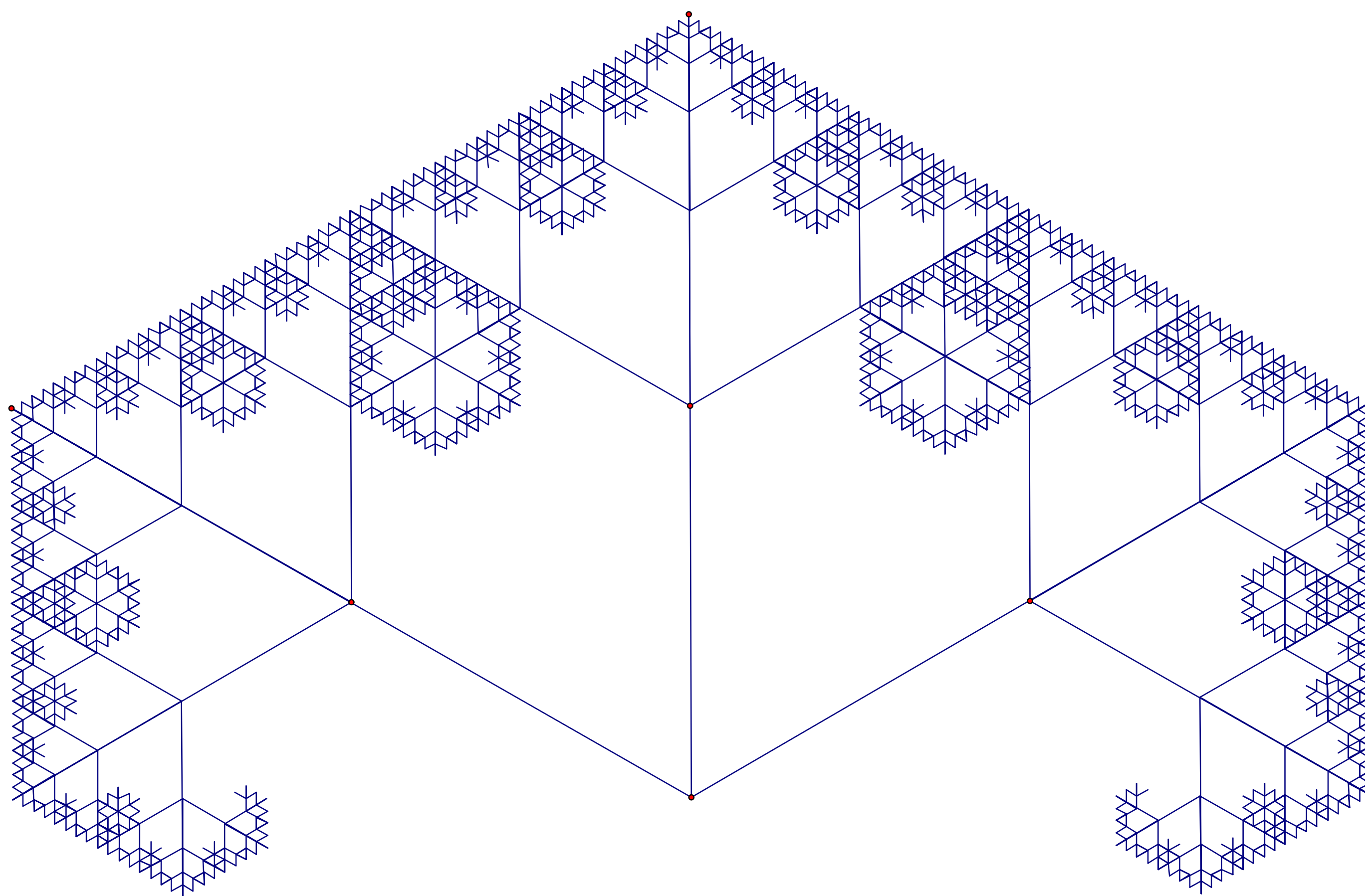


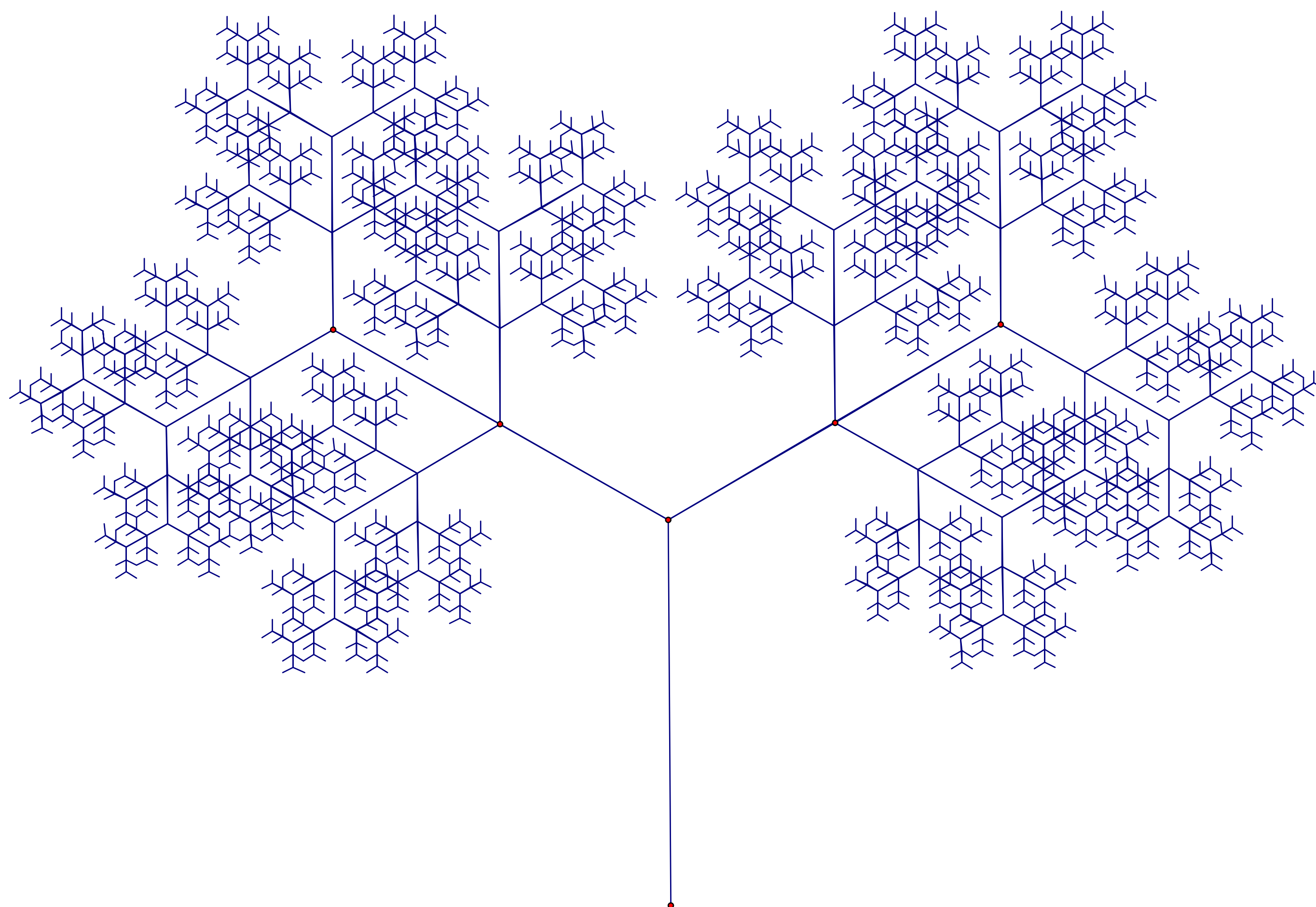


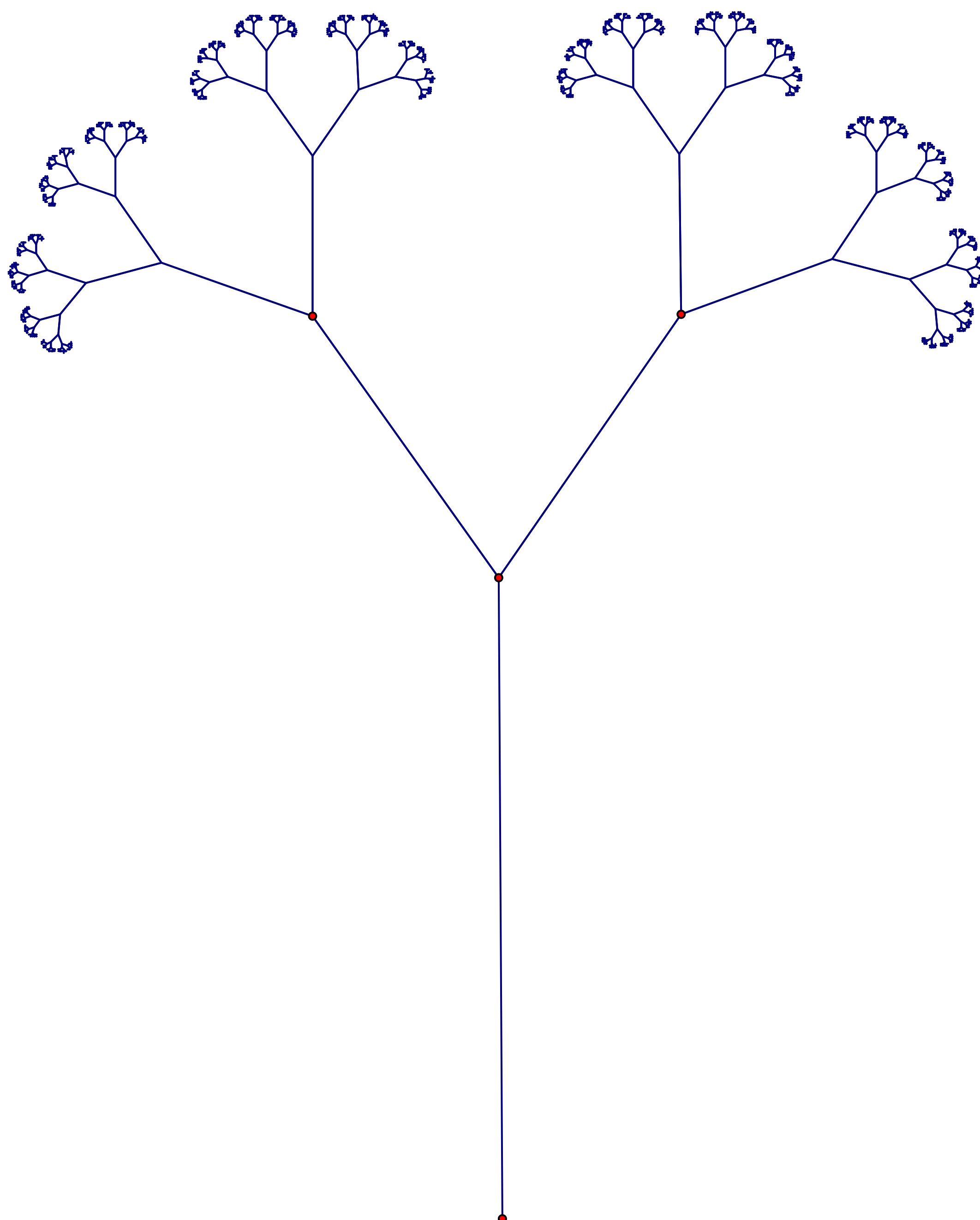


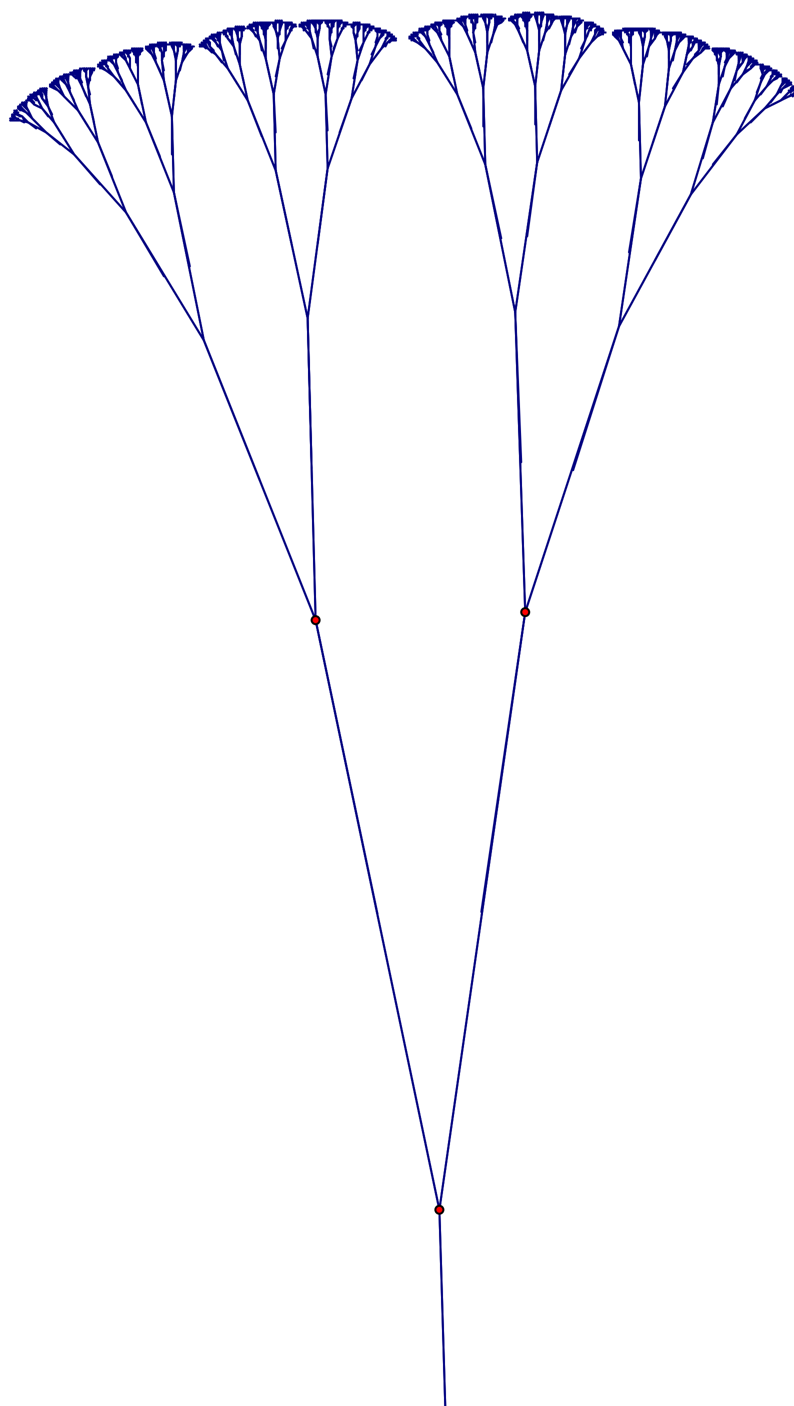


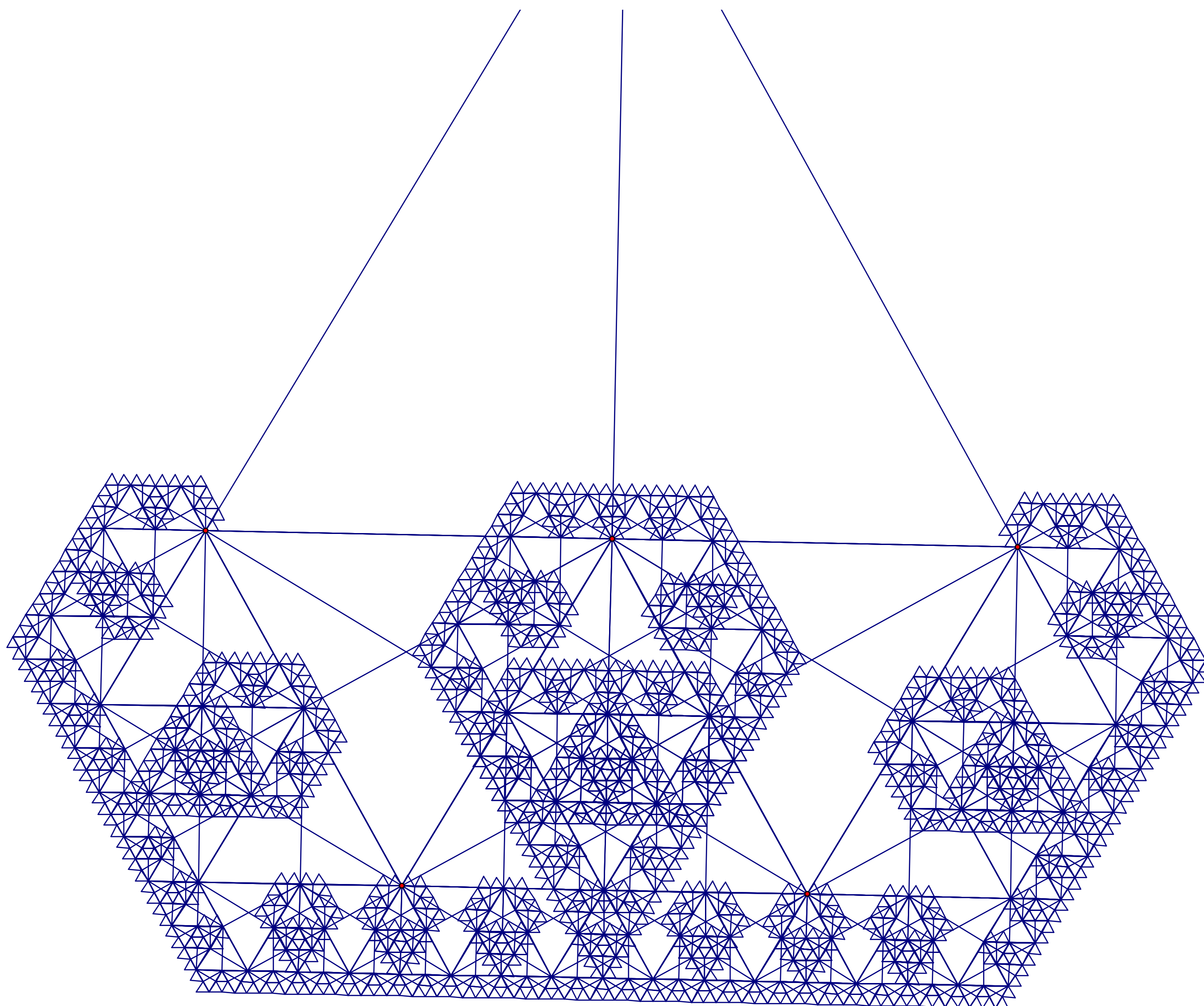


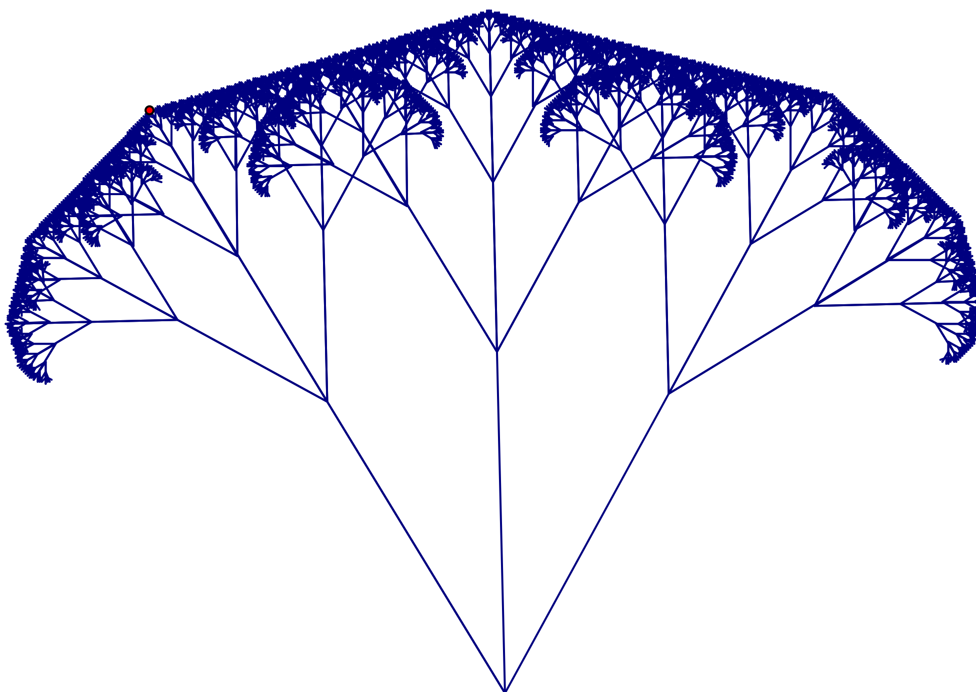


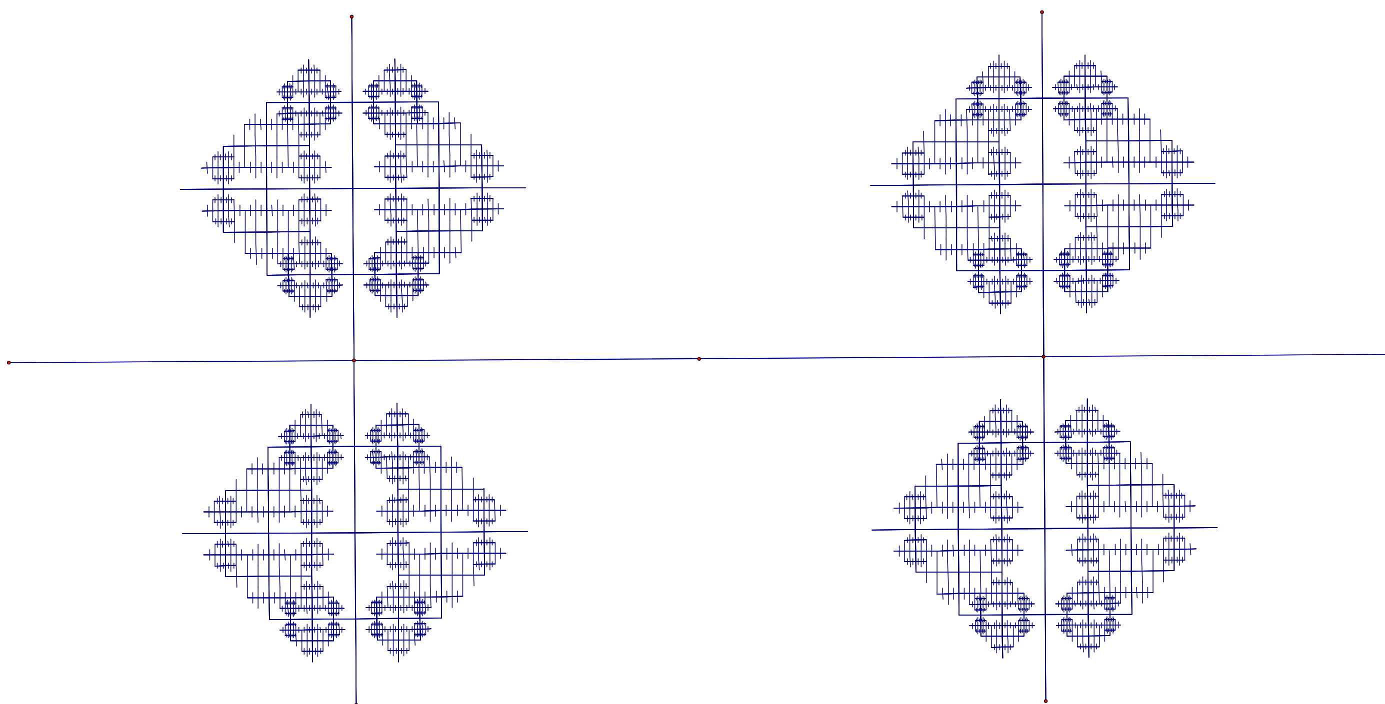


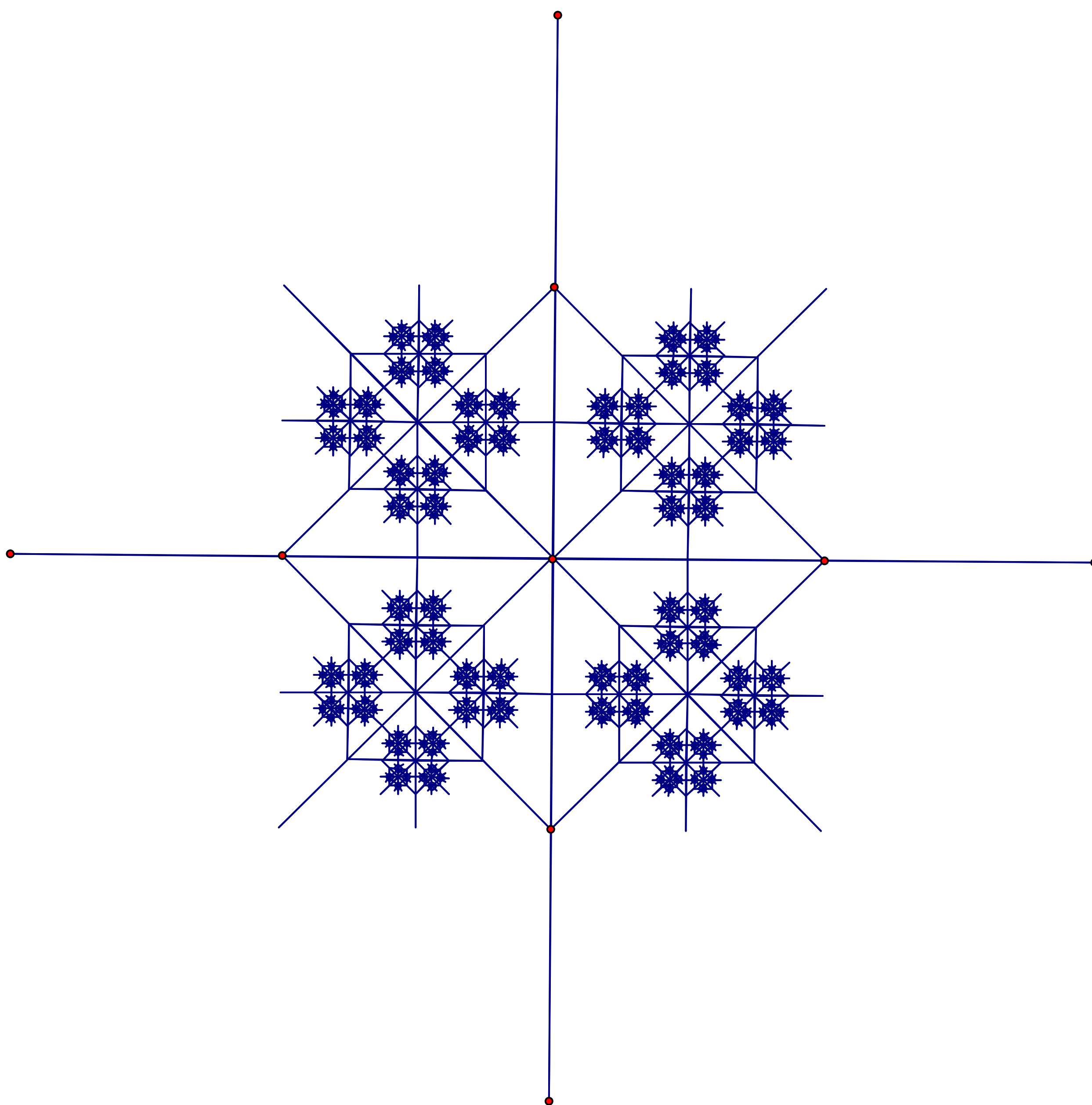












Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Σχολή Θετικών Επιστημών
Μαθηματικό Τμήμα
Τομέας Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών
Μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών στην διδακτική και μεθοδολογία των Μαθηματικών

Μάθημα : ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΑ
Διδάσκων: Χρόνης Κυνηγός

Εργασία: *«Εισαγωγή μιας συστηματικότερης διδασκαλίας σε σχέση με τις έννοιες μέτρησης μεγάλου πλήθους η του απείρου στο Γυμνάσιο-Λυκείο με ελκυστικους τρόπους»*

μεταπτυχιακός φοιτητής

Ιωάννης Π. Πλατάρος

Α.Μ. 211502

Εργασία: *«Εισαγωγή μιας συστηματικότερης διδασκαλίας σε σχέση με τις έννοιες μέτρησης μεγάλου πλήθους η του απείρου[1] στο Γυμνάσιο-Α΄Λυκείου με ελκυστικους τρόπους»*

Ο. Περίληψη

Η παρούσα εργασία αφορά στην διδασκαλία ορισμένων θεμάτων στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση που αφορούν σε μετρήσεις πολύ μεγάλου πλήθους , που προσεγγίζουν την έννοια του άπειρου και του απειροστού . Η προσέγγιση γίνεται είτε μέσω ανοικτού προβλήματος και κατά ομάδες εργασίας των μαθητών , είτε και με ομαδική συμμετοχή της τάξης ανάλογα με την ευρύτητα –σημαντικότητα του θέματος.

1. Επιστημολογικά προβλήματα κατά την διδασκαλία της έννοιας του απείρου

α) Το άπειρο ως έννοια

Κάθε φορά που σκεπτόμαστε το άπειρο , μπορεί να εννοούμε μια αόριστη ποσότητα της οποίας το μέγεθος έχει υπερβεί κάθε όριο ή

Μια συγκεκριμένη ποσότητα ,την οποία φανταζόμαστε ότι μεγαλώνει αδιάκοπα , αλλά πάντα αυτή μένει μικρότερη από αυτήν που λέμε άπειρη.

---

[1] «Ανέκαθεν το άπειρο διήγηρε την ανθρώπινη ψυχή, περισσότερο από κάθε άλλο ζήτημα. Δύσκολα μπορεί να βρεθεί μια ιδέα που να έχει ερεθίσει τόσο γόνιμα το λογικό , όσο αυτή του απείρου. Εν τούτοις, καμία άλλη έννοια δεν χρειάζεται

β) Το άπειρο δεν είναι αριθμός

Ο ορισμός της έννοιας του αριθμού , μέσα από τις συνεχείς επεκτάσεις που έγιναν είναι αρκετά δύσκολος , αφού ξεκινάμε από τους φυσικούς, πάμε στους ακεραίους , στους ρητούς , μετά στους άρρητους και τους πραγματικούς , επεκτεινόμαστε στους μιγαδικούς, αλλά μπορούμε να φθάσουμε μέχρι και την (φιλοσοφική) έννοια των διατακτικών αριθμών. Έτσι έχουμε αρκετά είδη αριθμών . Για να αποκλείσουμε το άπειρο από τα είδη των αριθμών θα πρέπει να του αφαιρέσουμε μια χαρακτηριστική ιδιότητα που έχουν όλοι οι αριθμοί!

Ας δούμε ποια είναι αυτή:

Ο μαθητής μπορεί εύκολα να καταλάβει ότι για κάθε φυσικό υπάρχει ένας μεγαλύτερός του. Αν όμως έχει κατά νου το μοντέλο των φυσικών, δηλαδή ως ένα σύνολο μονάδων για το οποίο δεν υπάρχει μεγαλύτερο, τότε παύει το άπειρο να έχει αυτή την ιδιότητα των αριθμών. Άρα δεν είναι αριθμός . δηλαδή, δεν υπάρχει μεγαλύτερος «αριθμός» από το άπειρο.

γ) Το άπειρο δεν είναι ποσότητα

Η ποσότητα επιδέχεται ελάττωση κι αύξηση . Το άπειρο όμως ούτε μπορεί να αυξηθεί επειδή είναι πάνω από κάθε ποσότητα , ούτε μπορεί να ελαττωθεί , επειδή έτσι γίνεται κι αυτό ποσότητα πεπερασμένη.

Βεβαίως δεν είναι ποσότητα, αλλά συνάπτεται με την ποσότητα .

διαφώτιση , όσο αυτή» D. HILBERT στο ιστορικό του άρθρο «Για το άπειρο» (On Infinity)

Για παράδειγμα αν έχω το μοντέλο του άπειρου με τους φυσικούς αριθμούς , τότε το άπειρο συγκρίνεται με κάθε φυσικό κι είναι μεγαλύτερό του, άρα είναι «ομοιογενές» (όχι ομοειδές!) με τους αριθμούς.

Αν στο μυαλό μου έχω της ευθείας ως «απεριόριστο ευθύγραμμο τμήμα» τότε πάλι έχω την έννοια του απείρου να συνάπτεται με το πεπερασμένο (ευθύγραμμο τμήμα) ως την «ομοιογενή» ευθεία.

<u>δ) Το άπειρο είναι κριτήριο για το πεπερασμένο;</u>

Θα κάνουμε την προσέγγιση αυτή με παράδειγμα:
Ας θεωρήσουμε , ότι έχουμε το πρόβλημα να εκτιμήσουμε αν οι κόκκοι της άμμου όλων των θαλασσών της Γης είναι άπειροι ή πεπερασμένοι. Μπορούμε να παραθέσουμε το εξής επιχείρημα:

(i) Όλοι γνωρίζουμε ότι η γη είναι πεπερασμένη.

(ii) Αρχίζουμε με μια μεγάλη ταχύτητα να βγάζουμε άμμους από την Γη προς το διάστημα , μέσα από μηχανές απαρίθμησης. Στην ανάγκη φανταζόμαστε εκατομμύρια τέτοιες μηχανές που λειτουργούν με μεγάλη ταχύτητα. Εδώ οι προσλαμβάνουσες παραστάσεις των μαθητών είναι προς την κατεύθυνση αποδοχής του σχήματος αυτού , αφού η διαδικασία αναζήτησης αρχείων ή ελέγχου ενός Η/Υ για ιούς , είναι ουσιαστικά διαδικασίες απαρίθμησης μέσω μιας μηχανής. Άρα η διαδικασία αυτή ,γίνεται αντιληπτό , ότι θα μας οδηγήσει σε πέρας και σε απαρίθμηση!…..

Κατόπιν του ανωτέρω επιχειρήματος δεν υπάρχει σχεδόν κανείς άνθρωπος να αμφιβάλει περί τούτου, αφού το ανθρώπινο πνεύμα συλλαμβάνει την ιδέα ότι κάτι που διασπείρεται-

κατανέμεται σε πεπερασμένο χώρο , δεν μπορεί παρά να είναι πεπερασμένο!

Στην ουσία όμως το παραπάνω επιχείρημα είναι δίκοπο μαχαίρι, αφού άνετα μπορεί να πείσει κάποιον ότι οι κόκκοι της άμμου όλων των θαλασσών είναι πεπερασμένοι, από την άλλη όμως μπορεί να τον παγιδέψει στην λογική των επιχειρημάτων του Ζήνωνα του Ελεάτη , σχετικά με το βέλος που δεν φθάνει ποτέ στον στόχο του

[2] Ή «με το μη εκκινούν»[3] ή με το γνωστότερο του «ωκύποδα»(=γοργοπόδαρου) Αχιλλέα που δεν κατορθώνει να φθάσει την προσωποποίηση της βραδύτητας χελώνα [4]

Κοινός παρονομαστής των παραδόξων του Ζήνωνα είναι η προφανής αδυναμία του ανθρωπίνου πνεύματος να παραδεχθεί ως προφανές ότι το άπειρο μπορεί να ενυπάρχει στο πεπερασμένο . Από προσωπική εμπειρία του υπογράφοντος , είναι γνωστό, όταν το ερώτημα τεθεί ακόμα και σε τελειόφοιτους των μαθηματικών με ένα κατάλληλο καμουφλάρισμα οδηγεί στο

---

[2] Σύμφωνα με αυτό για να πάει το βέλος στον στόχο του , θέλει κάποιο χρόνο $τ_1$ για να πάει μέχρι την μέση της διαδρομής, $τ_2$ για να πάει μέχρι την μέση της υπολειπόμενης(=το μισό του μισού=1/4 της αρχικής) διαδρομής, $τ_3$ μέχρι την μέση της υπολειπόμενης της υπολειπόμενης διαδρομής(=το μισό του μισού του μισού =το 1/8 της αρχικής) κ.ο.κ. κι αυτό συνεχίζεται επ' άπειρον, άρα πάντα θέλω κάποιον χρόνο, άρα ….ποτέ δεν θα φθάσει!

[3] Σύμφωνα μ' αυτό , για να πάω από τον πίνακα της τάξης μέχρι την πλατεία της πόλης, πρέπει πρώτα να πάω μέχρι τον περίβολο του σχολείου, για να πάω όμως μέχρι τον περίβολο πρέπει πρώτα να πάω μέχρι την εξώπορτα , για να πάω όμως μέχρι την εξώπορτα πρέπει πρώτα να πάω μέχρι την πόρτα της τάξης, για να πάω όμως μέχρι την πόρτα της τάξης πρέπει πρώτα να πάω 5 βήματα, για να πάω όμως 5 βήματα πρέπει πρώτα να πάω 4 βήματα, …3 βήματα, 2 βήματα, 1 βήμα, ½ του βήματος, ¼ του βήματος, 1/8 του βήματος , 1/16 του βήματος, 1/32 του βήματος, 1/64 του βήματος κι αυτό μπορεί να συνεχιστεί επ΄άπειρον , άρα δεν πάω στην πλατεία ….ποτέ!

[4] Η χελώνα προπορεύεται κι ο Αχιλλέας προσπαθεί να την προφθάσει. έτσι, μέχρι να πάει ο Αχιλλέας μέχρι εκεί που είναι η χελώνα **τώρα**, αυτή θα έχει προλάβει να πάει κι άλλο λίγο ακόμα. Μέχρι να ξαναπάει ο Αχιλλέας μέχρι εκεί που είναι η χελώνα **τώρα**, αυτή θα έχει προχωρήσει κι άλλο λίγο ! Και αυτή η αλυσίδα έχει άπειρα βήματα, άρα ο Αχιλλέας δεν θα φθάσει ποτέ την χελώνα!

ίδιο λάθος που η Ιστορική εμπειρία έχει καταγράψει χιλιάδες φορές!

Συγκεκριμένα το ερώτημα τίθεται ως εξής:
«Αν προσθέσω άπειρους στο πλήθος θετικούς αριθμούς , τι αποτέλεσμα θα πάρω; Άπειρο ή πεπερασμένο;»
Η συντριπτική πλειονότητα των απαντήσεων εδώ είναι του τύπου «προφανώς άπειρο!»

Βεβαίως αυτή η απάντηση μπορεί να εισπραχθεί ακόμα κι από πρόσωπα που έχουν γνωρίσει κι ίσως αποδείξει ότι

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+.........=1$$

Εδώ κάποτε μου αντέτεινε ένας φοιτητής ότι αυτό συμβαίνει διότι ναι μεν κάθε φορά προσθέτουμε κάτι, αλλά αυτό το κάτι είναι μικρότερο από το προηγούμενο, έτσι στο τέλος «εκφυλίζεται» και δεν είναι ικανή η διαρκής πρόσθεση να απειρίσει το άθροισμα…..
Τότε του υπενθύμισα ότι $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+........=+\infty$ Το ίδιο δεν ισχύει κι εδώ;
Έφυγε σκεπτικός ……[5]

[5] O Alain Duroux ορίζει ένα επιστημολογικό εμπόδιο με 4 χαρακτηριστικά:
α)Είναι μια γνώση με ένα αρκετό πεδίο εφαρμογής (ισχύει προφανώς για το άπειρο στα μαθηματικά)
β) Αυτή η γνώση προσπαθώντας να εφαρμοσθεί και σε άλλες καταστάσεις , προκαλεί λάθη που εντοπίζονται και αναλύονται μόνο σε σχέση με το εμπόδιο . (εδώ έχομε ακριβώς αυτό το χαρακτηριστικό)
γ)Το εμπόδιο αντιστέκεται στην προσπάθεια εξειδικευμένης εφαρμογής του. (προφανώς κι εδώ έχομε ισχύ)
δ) Η απόρριψη της γνώσης που συναντά επιστημολογικό εμπόδιο, δημιουργεί την νέα γνώση. (Εδώ η «γνώση» ότι άπειροι θετικοί έχουν πάντα άπειρο άθροισμα κλονίζεται αποφασιστικά.)
Εξ άλλου ο Sierprinska δίνει τον ορισμό του επιστημολογικού εμποδίου ως εξής: Αν το εμπόδιο δεν είναι δικό μας εμπόδιο, ή πιθανόν και δύο άλλων ανθρώπων, αλλά είναι πιο πλατειά διαδεδομένο , ή έχει διαδοθεί κάποια φορά σε κάποιο πολιτισμό, αυτό λέγεται επιστημολογικό εμπόδιο. Η ίδια η φύση των επιστημολογικών εμποδίων είναι τέτοια , που δεν μπορούν να αποφευχθούν και ο ρόλος τους στην σκέψη μας είναι σημαντικός .

Βέβαια αυτά τα προβλήματα με το άπειρο και τις άπειρες ποσότητες ταλαιπωρούν αρχαιόθεν το ανθρώπινο πνεύμα και βέβαια αυτή η ταλαιπωρία στάθηκε αφορμή για καλύτερους ορισμούς μαθηματικών θεωριών.

ε) Το άπειρο ως πηγή παραδόξων

Η παραδοχή απείρων μαθηματικών αντικειμένων οδηγεί σε παράδοξα:
Λόγου χάριν

Το σύνολο όλων των συνόλων έχει τον μέγιστο πληθικό αριθμό (=ισχύ) από όλα τα σύνολα. Αλλά το δυναμοσύνολό του έχει μεγαλύτερη ισχύ ! (αυτή είναι μια πρόταση που μπορεί να αποδειχθεί) Τότε τι συμβαίνει;

Το σύνολο όλων των συνόλων , ως σύνολο που είναι είναι και στοιχείο του εαυτού του; (Ένα σύνολο μέρος του εαυτού του;)
Η **υπόθεση του συνεχούς** του Cantor[6] κατέστη πηγή γόνιμων συζητήσεων για τα μαθηματικά

Αλλά ήδη από τον Μεσαίωνα είχε γίνει σαφές ότι δύο ομόκεντροι κύκλοι μπορούν να θέσουν τα σημεία τους σε 1-1 αντιστοιχία (Κάθε σημείο του μεγάλου κύκλου μέσω της ακτίνας που αντιστοιχεί στο σημείο, αντιστοιχεί και σε σημείο του μικρού κύκλου. Κι αυτό ισχύει κι αντιστρόφως για τον μικρό κύκλο. Από

[6] Ο Cantor υπέθεσε ότι δεν υπάρχει ενδιάμεση ισχύς συνόλου ανάμεσα στην άλεφ μηδέν των φυσικών ($\aleph_0$) και την ισχύ του συνεχούς C . Ο Godel έδειξε ότι αυτή μπορεί να εκληφθεί ως μια πρόσθετη αξιωματική υπόθεση, διότι αν υπάρχει αντίφαση στην περιορισμένη θεωρία συνόλων μαζί με αυτό το πρόσθετο αξίωμα, τότε πρέπει να υπάρχει ήδη μια κρυμμένη αντίφαση στην περιορισμένη θεωρία των συνόλων.

την άλλη είναι προφανές ότι ο μεγάλος κύκλος έχει περισσότερα σημεία από τον μικρό! Άρα;…………

Γύρω στα τέλη του $17^{ου}$ αιώνα και στις αρχές του $18^{ου}$ οι μαθηματικοί είχαν αρχίσει να κατανοούν αρχές της ανάλυσης. Κι εδώ όμως τα παράδοξα του απείρου δεν άργησαν να φανούν: Μεγάλος λόγος έγινε για το άθροισμα της άπειρης σειράς

S= 1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1……………

Κάποιοι είπαν:

S= (1-1)+(1-1)+(1-1) +(1-1)+(1-1)+……..=0+0+0+0+…….=0

Άλλοι πάλι το είδαν ως

S= 1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-(1-1)-(1-1)-……..=1-0-0-0-0-0-…….=1

O Louitzi Guino Grandi(1671-1742) έδωσε την «Σολομόντια» λύση:

Υποστήριξε ότι επειδή οι τιμές για το άθροισμα 0 ή 1 «είναι εξ ίσου πιθανές» , τότε

S= 1-(1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+……..)=1-S

Άρα $S=1-S \Rightarrow 2S=1 \Rightarrow S=\frac{1}{2}$

Την ίδια περίοδο ο Leibniz υπελόγιζε την παράγωγο της συνάρτησης $Y=2\chi^2$ ως εξής:

$Y+\Delta y = 2(x+\Delta x)^2 \Rightarrow$

$Y+\Delta y = 2x^2+4x\Delta\chi + (\Delta\chi)^2 \Rightarrow$ *(διαγράφονται τα ίσα y και* $2\chi^2$*)*

$\Delta y = 4x\Delta\chi + (\Delta\chi)^2 \Rightarrow$ *(Με διαίρεση και των δύο μελών με Δχ)*

$\frac{\Delta y}{\Delta\chi} = 4\chi + \Delta\chi \Rightarrow$ (Επειδή Δχ «μηδενικό»)

$\frac{\Delta y}{\Delta\chi} = 4\chi$ που είναι το σωστό σύγχρονο αποτέλεσμα, πλην όμως , ο Leibniz δέχθηκε σκληρή κριτική για το τι είδους

μαθηματικά κάνει όταν δέχεται αντικείμενο με μηδενικές ιδιότητες με το οποίο μάλιστα διαιρεί ![7]……..

επιστημολογικά η Ανάλυση ακόμα «πληρώνει» τον συμβολισμό του Leibniz dy/dx ο οποίος ακόμα εκλαμβάνεται ως πηλίκον διαιρέσεως , αφού πολλές ιδιότητες των διαφορικών χειρίζονται με τις ιδιότητες της διαίρεσης, αλλά από την άλλη ο ρόλος του διαφορικού dx ως συνάρτησης εξαφανίζεται!……..

2. Πως βοηθά η Ιστορία της εξέλιξης κάποιων μαθηματικών εννοιών στην διδακτική τους;

Πρόκειται για ένα πεδίο όπου έχουν αναπτυχθεί αξιοπρόσεκτοι προβληματισμοί που αφορούν και την δύσκολη έννοια του απείρου στα μαθηματικά.

Σταχυολογούμε ορισμένες γνώμες ειδικών :

Horst Struve :

-Τα προβλήματα των μαθητών πολλές φορές είναι επιστημολογικά και οφείλονται στην φύση αυτών των εννοιών.

-Πρέπει να μελετήσουμε την Ιστορία των μαθηματικών, γιατί τα προβλήματα που εμφανίσθηκαν , είναι παρόμοια με αυτά που αντιμετωπίζουν οι μαθητές μας.

E.Berbin :

- Η Ιστορία των μαθηματικών είναι μια μορφή «θεραπείας» του δογματισμού στην διδασκαλία των μαθηματικών.
- -Η ιστορία μας βοηθά να συλλάβουμε την σημασία και το νόημα των μαθηματικών εννοιών και θεωριών.

Paolo Boero :

[7] Συγκεκριμένα ο Berkeley έλεγε πως μια τέτοια διαδικασία δεν θα μπορούσε να είναι δεκτή.(Διονύσιος Αναπολιτάνος «Εισαγωγή στην φιλοσοφία των Μαθηματικών» εκδόσεις Νεφέλη)

- Να οδηγούμε τους μαθητές σε μια διδακτική «προβληματική» κατάσταση, υπόχρεώνοντάς τους να περάσουν από τα ιστορικά στάδια κατασκευής μιας έννοιας

Francesco Speranza :

Να παρατηρούμε τα επιστημολογικά εμπόδια που έπρεπε να ξεπεράσει η ανθρωπότητα για να περάσει από την μια θεωρία στην άλλη . Παρόμοια προβλήματα αντιμετωπίζουν κι οι μαθητές μας.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει και η (υπόθεση) της **γενετικής ανακεφαλαιώσεως ,** όπου σύμφωνα με αυτήν, κάθε είδος κατά την φάση σύλληψης κυοφορίας και γεννήσεώς του, επαναλαμβάνει σύντομα την ιστορία της βιολογικής του εξέλιξης ως είδους.
Μια ασθενής αναλογία στην διδακτική , υποδεικνύει ότι η ιστορική εξέλιξη ενός αντικειμένου δείχνει τα στάδια από τα οποία πρέπει να περάσει η εκπαίδευση του ανθρώπου[8]

3. Επομένως πώς πρέπει να αντιμετωπιστεί το άπειρο διδακτικά;

Από την ύπαρξη και μόνο των παραπάνω παραδόξων είναι προφανές ότι η έννοια του απείρου είναι πάρα πολύ λεπτή , οδηγεί σε παράξοξα και έχει προβληματίσει τα μάλα την μαθηματική κοινότητα. Επομένως το εύλογο ερώτημα είναι αν και κατά πόσον μπορούν οι μαθητές να διαπραγματεύονται έννοιες του συνεχούς

[8] κατά την γνώμη του γράφοντος, σύμφωνα με αυτή την θεώρηση, η έννοια του αρρήτου αριθμού ως πολύ προγενέστερη της έννοιας του μηδενός ως συμβόλου κι αριθμού (τουλάχιστον 600 χρόνια διαφορά έχει η εμφάνιση της έννοιας του άρρητου στους Πυθαγόρειους και του συμβόλου του αριθμού 0 , τον 3^{o} περίπου αιώνα μ.Χ.

του απειροστού και του απείρου . Ποίος είναι άραγε ο τρόπος εισαγωγής και εξοικείωσης με αυτές τις έννοιες;

Η απάντηση στα παραπάνω είναι ότι το άπειρο αντιμετωπίζεται με την κατάδειξη των ιδιαιτεροτήτων του , των αδυναμιών του , των ίδιων του των «παροδόξων». Είναι μια καθημερινή έννοια στα μαθηματικά , έστω και κρυμμένη . Οι δυσκολίες του συνεχούς δεν θα πρέπει να αποτελέσουν το άλλοθι για την επικράτηση των «διακριτών μαθηματικών» και για τον παραγκωνισμό των «εψιλον-δέλτα» ορισμών της ανάλυσης [9] Είναι θέμα σωστής θεμελίωσης και συνακόλουθα σωστής διδακτικής προσέγγισης.

3.1 . Που και πως εμφανίζεται καθημερινά το άπειρο στην καθημερινή διδακτική πράξη;

- Έχομε μια ευθεία . Άρα έχουμε κάθε απόσταση μεταξύ δύο σημείων, είτε μικρή είτε μεγάλη. Όλα τα δυνατά μήκη υπάρχουν κι είναι άπειρα.
- Υπάρχουν άπειρα , τρίγωνα, τετράγωνα , κύκλοι σφαίρες και κάθε γεωμετρικό σχήμα.
- Το Πυθαγόρειο Θεώρημα νοείται **για κάθε** ορθογώνιο τρίγωνο άρα για **άπειρα** ορθογώνια τρίγωνα και είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι ισχύει **για όλα**

[9] Υπάρχει μια τρόπον τινά «ιδεολογική» φόρτιση και μια -ας την πούμε- «διαμάχη» περί το θέμα των «διακριτών» μαθηματικών ως έτερο πόλο των «συνεχιστικών» . Είναι ένα φαινόμενο που μπορεί να παρατηρηθεί σε διάφορα συνέδρια μαθηματικών . Βεβαίως τα επιχειρήματα είναι παιδαγωγικής φύσεως , ότι δηλαδή τα διακριτά είναι κοντύτερα στην φύση των παιδιών στις γυμνασιακές και λυκειακές ηλικίες κτλ. Βεβαίως και με το ότι καταγράφεται κάποια αντίδραση σημαίνει ότι υπάρχει κάποιο πρόβλημα και κάποια επιχειρηματολογία .Σε κάθε περίπτωση πάντως η ίδια η Ιστορική εξέλιξη ακόμα και στον εικοστό αιώνα της έννοιας του απείρου στα Μαθηματικά ήταν προβληματική , με σκοπέλους , αλλά και γόνιμες καταστάσεις…….

- Το εμβαδόν του κύκλου προσεγγίζεται και τελικά υπολογίζεται με μια διαδικασία όπου άπειρα ισοσκελή τρίγωνα με πλευρές όσο «περίπου» κι οι ακτίνες του κύκλου και η ευθύγραμμη βάση τους ίση «περίπου» με το τόξο στο οποίο βαίνουν!
- Επαγωγικές και άλλες προτάσεις ισχύουν για άπειρο αριθμό περιπτώσεων κτλ.
- Το εμβαδόν των καμπυλογράμμων χωρίων θα ήταν άπιαστο χωρίς την αποφασιστική προσέγγιση μέσω απειροστικών διαδικασιών (Από την εποχή του Αρχιμήδη και με την μέθοδο της εξάντλησης)
- Το μυστήριο με του ασύμμετρους –αρρήτους γίνεται πιο «ζωντανό» όταν πάμε να τους πλησιάσουμε.

Συνηθίζουμε να λέμε:

«Οι παράλληλες ευθείες τέμνονται στο άπειρο»

«ευθεία είναι μια περιφέρεια κύκλου με άπειρη ακτίνα»

Βεβαίως η έννοια της συνέχειας κατάγεται από το άπειρο, μας πάει στην παράγωγο και το ολοκλήρωμα και τελικά σε όλη την Ανάλυση.

Άρα ο εξοβελισμός του απείρου είναι αδύνατος από τα μαθηματικά κι από την διδακτική τους………

3. 2. Από πια ηλικία μπορούν οι μαθητές να κατανοούν έννοιες με πολύ μεγάλους αριθμούς ή το άπειρο;

Ενδιαφέρον έχει μια συζήτηση μεταξύ τωνJean Piaget , P. Joylien και F. Halbwachs[10] σχετικά με τις ηλικίες των παιδιών, τα

[10] F. Halbwachs , καθηγητής στο Παν. Της Provence , P. Joulien Διευθυντής στο Ινστιτούτο I.R.E.M. της Grenoble . Η συζήτηση με τον Piaget, έγινε μετά από αίτημα

μεγέθη των αριθμών που μπορούν να χειριστούν και την έννοια του απείρου.

……………………………………………………………………………..

P. Joulien: Υπάρχει ένα πολύ σοβαρό πρόβλημα στην διδασκαλία των μαθηματικών , το πρόβλημα της διδασκαλίας της Αναλύσεως , δηλαδή της μεθοδικής εξαγωγής όλων των στοιχείων που μπορούν να προέλθουν από το άπειρο. Δεν καταπιανόμαστε με αυτά τα πράγματα αρκετά νωρίς;

Piaget: Ναι.

P. Joulien: Μήπως έχετε συγκεκριμένες απόψεις πάνω σε αυτό το σημείο;

Piaget: Δεν έχω μελετήσει αυτό το ζήτημα. Για το άπειρο έχουμε κάνει μια μικρή έρευνα μαζί με τον Barbel Inhelder , η οποία συνίστατο στο να ρωτήσουμε πόσα σημεία μπορούμε να τοποθετήσουμε ανάμεσα σε δύο ορισμένα σημεία. Ήταν πολύ αστείο αυτό που πραγματοποιείτο πάνω σ΄ αυτό το ερώτημα ως γενετική πρόοδος με την πάροδο της ηλικίας. …Τα μικρά παιδιά , έλεγαν ότι μπορούμε να τοποθετήσουμε 10 σημεία , κι όχι περισσότερα.Τα μεγαλύτερα περνούσαν στα 30 σημεία και αργότερα στα 100 και μόνο στην ηλικία των 11-12 ετών άρχιζαν να λενε «μπορούμε να τοποθετήσουμε όσα θέλουμε»

Σ΄αυτό το επίπεδο λοιπόν βρίσκαμε διασκεδαστικά πράγματα αναφορικά με την έννοια του απείρου

Να ένα παράδειγμα:

Κάναμε ένα πείραμα που συνίστατο στο να προσπαθούμε να προσδιορίσουμε και να χαράξουμε πάνω σε ένα αντικείμενο (π.χ. πάνω σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο) τη γραμμή , πέρα

της Γαλλικής εταιρείας Ερευνών σε θέματα διδακτικής (A.F. C. E. D.) το 1976 στο περιοδικό «Renue Francaise de Pedagogie» Νο 37 Οκτώβριος Νοέμβριος

από την οποία το αντικείμενο αυτό θα έπεφτε, γιατί δεν θα μπορούσε να στηριχθεί και να κρατηθεί , δηλαδή να βρούμε και να χαράξουμε την γραμμή ισορροπίας του. Και να ακριβώς το ερώτημα:

«Σε ένα ορθογώνιο πόσες τέτοιες γραμμές μπορούν να βρεθούν;' Απάντηση: «4» Αντίθετα σε ένα κύκλο οι γραμμές ισορροπίας θεωρούντο άπειρες.

Τότε λοιπόν, ξαναπαίρναμε το ορθογώνιο και λέγαμε; «το ποθέτησέ το όπως θέλεις' τη στιγμή όμως που το παιδί πήγαινε να γυρίσει το ορθογώνιο, διεπίστωνε ότι η ισορροπία μπορούσε να διατηρηθεί και σε άλλη θέση και και έλεγε αυθόρμητα: « Α! μπορώ να το γυρίσω; τότε είναι το ίδιο πράγμα κι εδώ . Ο αριθμός των θέσεων ισορροπίας είναι άπειρος!» Αυτό όμως συνέβαινε από την ηλικία των 11-12 ετών και μετά.

<u>P. Joulien</u>: δεν γνωρίζετε άλλα πρόσωπα που έκαναν έρευνες πάνω στο άπειρο;

<u>Piaget:</u> Τον Carreras που έκανε έρευνα πάνω στο απειροστημόριο[11]

<u>F. Halbwachs</u>: το άπειρα μικρό είναι από αυτή την άποψη πολύ περισσότερο κατάλληλο . Η Ανάλυση εισάγει πρώτα απ΄ όλα το άπειρα μικρό και υπάρχει παραδείγματος χάριν η έννοια του "τείνειν προς…" η οποία είναι βέβαιο ότι εισάγει την έννοια του άπειρα μικρού με ένα πολύ πιο οικονομικό τρόπο , απ΄ όσο εισάγει την έννοια του άπειρα μεγάλου, (Μόνο που δεν ξέρω αν απλοποιεί ή , αντίθετα, πολυπλοκοποιεί την ΄'έννοια)

Πάντως το άπειρα μεγάλο και το άπειρα μικρό δεν μου φαίνονται καθόλου ισοδύναμα από ψυχολογικής απόψεως.

Δεκέμβριος 1976 και παρουσιάζεται σε απόδοση του Νικολάου Ράπτη

Piaget: Όχι καθόλου

F. Halbwachs: Μπορεί κανείς όμως να ξεπεράσει το "όσο μικρό θελήσουμε" όταν πει " τείνει προς…."

P. Joulien: Για μένα αν θέλεις το άπειρο είναι το "άπειρο της επαναλήψεως" Δηλαδή για το άπειρα μεγάλο εσύ μεν σκέφτεσαι τους διαδοχικούς ακεραίους αριθμούς, εγώ Δε σκέφτομαι τις πράξεις που επαναλαμβάνονται άπειρες φορές. Έτσι στο άπειρα μικρό, το να τείνουμε προς το μηδέν , είναι σαν να πλησιάζουμε κάθε φορά κατά το ήμισυ προς το τέλος. Δεν υπάρχουν δηλαδή τελικά τόσο μεγάλες διαφορές, διότι το "τείνειν προς…." Αποτελεί σε τελευταία ανάλυση την πραγματοποίηση μιας απειρίας , πράξεων ,έστω κι αν με τις απειράριθμες αυτές πράξεις, γίνονται πολύ μικρά βήματα

F. Halbwachs: Δεν είμαι βέβαιος ότι τα παιδιά δεν βρίσκουν αμέσως ότι δεν υπάρχει κάτι , ότι υπάρχει κάτι παράδοξο στην ιστορία του Αχιλλέα και της χελώνας . Για παράδειγμα: Η ιδέα ότι ο Αχιλλέας "θα τείνει να φθάσει" , είναι η πρώτη τους απάντηση. Η ιδέα ότι η ενέργεια του Αχιλλέα θα είναι επαναληπτική, δηλαδή ότι η απόσταση που χωρίζει τον Αχιλλέα και την χελώνα μειώνεται διαδοχικά από το 1/10 στο 1/100 , στο 1/1000 κτλ.[12] Ως το άπειρο , είναι εκείνη που κάνει να φαίνεται η χελώνα άφθαστη.

Επομένως πρόκειται για δύο τρόπους τοποθετήσεως του ιδίου προβλήματος που είναι εντελώς διαφορετικοί μεταξύ τους: Ένας που είναι σχετικός προς την ευθυκρισία της κοινής λογικής και λέγει ότι ο γρήγορος Αχιλλέας θα φθάσει την αργοκίνητη χελώνα , γιατί "τείνει προς αυτή" και την ξεπερνάει πολύ σε ταχύτητα, και ο

[11] Εδώ η απόδοση στην μετάφραση του κ. Ράπτη είναι ακριβώς «απειροστημόριο» και προφανώς εννοείται το «απειροστό»

άλλος που κάνει να παρεμβαίνει ο επαναληπτικός αλγόριθμος και που καταλήγει σε αυτό το απειροστικό αριθμητικό παράδοξο, το οποίο οδηγεί στο παράξενο συμπέρασμα ότι ο γοργοπόδαρος Αχιλλέας δεν θα μπορέσει να φθάσει ποτέ την αργοκίνητη χελώνα.
P. Joulien: Το παιδί αρνείται το παράδοξο . Από την στιγμή που ξέρει ότι στην πραγματικότητα ο Αχιλλέας θα φθάσει και θα ξεπεράσει την χελώνα, το παιδί αρνείται να συζητήσει και να μπει σε άλλο σχήμα σκέψης.
F. Halbwachs: Αυτό όμως θέλει να πει , ότι πρόκειται για ένα άλλο επαναληπτικό σχήμα , που δεν βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με το σχήμα "τείνει προς…" , ότι τα δύο σχήματα , δεν έχουν την ίδια οργανική συγκρότηση . Ποία είναι η δική σας γνώμη σ΄αυτό;
Piaget: Πράγματι, αυτό σκέφτομαι κι εγώ….

....

3.3 Ο λειτουργικός ρόλος του προβλήματος στα μαθηματικά , κατά Polya[13]

Ο Polya είναι ο πρώτος που διετύπωσε τις ευρετικές μεθόδους στην διδασκαλία (πρόβλημα-λύση-problem solving) . Ο όρος ευρετική που εισήγαγε, σημαίνει μια γενική υπόδειξη που βοηθά αυτόν που λύνει ένα πρόβλημα, να το κατανοήσει , να συλλάβει την λύση του και στην συνέχεια να το λύσει.
Στον Polya, ξεχωριστή θέση κατέχουν τρία αξιώματα:

[12] Προφανώς στην διατύπωση του παραδόξου του Ζήνωνα που έχει στο μυαλό του ο F. Halbwachs: είναι η υπόθεση ότι ο Αχχιλέας έχει δεκαπλάσια ταχύτητα από την χελώνα .
[13] Το μνηνειώδες έργο του Polya, «Πώς να το λύσω» , αν και χρονολογικά παλαιό , διατηρεί πάρα πολλά από τις καινοτόμες ιδέες της εποχής του και σήμερα.

- Για την μάθηση, η κατάλληλη μορφή διδασκαλίας, είναι η επανανακάλυψη, βασισμένη στον Σωκρατικό διάλογο – ενεργητική μάθηση.
- η διαδικασία μάθησης περιέχει επιθυμητό κίνητρο. Ο δάσκαλος πρέπει να παρέχει την νέα ύλη με ενδιαφέρον κι ευχαρίστηση.
- Τα διαδοχικά στάδια στην μάθηση, πρέπει να είναι η εξερεύνηση, η διατύπωση, και η αφομοίωση.

3.4. Οι τρεις τύποι προβλήματος κατά Polya

Ο Hatfield το 1978, στηριζόμενος στην θεωρία του Polya, διέκρινε τρεις τύπους διδασκαλίας που αναφέρονται στην διαδικασία «Πρόβλημα-Λύση προβλήματος» :

- **Στη διδασκαλία ΓΙΑ το Π-Λ** Στον τύπο αυτό δίνουν έμφαση τα σχολικά βιβλία, θέτουν στόχο να αποκτήσει ο μαθητής τις κατάλληλες δεξιότητες και γενικές γνώσεις που είναι απαραίτητες για την λύση των προβλημάτων.
- **Στη διδασκαλία ΓΥΡΩ από το Π-Λ** : Στον τύπο αυτό , ο δάσκαλος πρέπει να δώσει τα σωστά μοντέλα συμπεριφοράς που θα οδηγήσουν στην ορθή πορεία για την λύση του προβλήματος.
- **Στην διδασκαλία ΜΕΣΑ από το το Π-Λ.** Αυτός είναι ο τύπος που ενθαρρύνει ο Polya . Σύμφωνα με αυτόν, ολόκληρη η

παρουσίαση των μαθηματικών γίνεται μόνο μέσα από διαδικασίες επίλυσης προβλήματος , με κατάλληλα επιλεγμένα παραδείγματα και έτσι μυούνται ο ιμαθητές στην διαδικασία επίλυσης προβλήματος .

με αυτές τις απόψεις του Polya τέθηκαν οι βάσεις για την συνέχιση της έρευνας σε αυτό που αποκαλείται « διαδικασία επίλυσης προβλήματος» (**Problem solving**)

4. Ερώτημα :

Πώς μπορεί να διδαχθεί το ότι το σύνολο (α , β) δεν έχει μέγιστο ούτε ελάχιστο [14]στοιχείο ;

Απάντηση:

Προτείνεται η εισαγωγή της διδασκαλίας του με διαδικασία επίλυσης προβλήματος στην Α΄Λυκείου στην ενότητα των ανισώσεων .

4.1. Το πρόβλημα για την εισαγωγή:

Σε ένα απλό φύλλο εργασίας δίνεται το πρόβλημα , ενώ ορίζονται ομάδες των τεσσάρων μαθητών (Ανά δύο θρανία)

<u>Διατύπωση του προβλήματος:</u>

« Ο εκκεντρικός βασιλιάς της Ζουαζηλάνδης , έκανε την εξής βαρυσήμαντη δήλωση:
-Χαρίζω το βασίλειό μου σε όποιον κατορθώσει και μου δώσει την πιο μεγάλη χρηματική ή άλλη αξία, που όμως να είναι μικρότερη από 2 ευρώ!……..
Εσείς τι λέτε ; Κινδυνεύει να χάσει το βασίλειό του;»

Πιθανό σενάριο του μαθήματος:

(i) Οι μαθητές αφήνονται να δουλέψουν και να αναπτύξουν εικασίες ή και ολοκληρωμένες απαντήσεις για το πρόβλημα για 5 λεπτά . Μετά από τα πέντε λεπτά, καλούνται , η κάθε ομάδα να ανακοινώσει το αποτέλεσμά της.

Οι πιθανές απαντήσεις που μπορούν να δοθούν εδώ μπορούν να εκπλήξουν τον διδάσκοντα , ο οποίος καλείται να τις χειριστεί και να τις κατευθύνει «υπογείως» και αφανώς προς την κατεύθυνση που έχει προσχεδιάσει:

Έτσι οι πιθανές απαντήσεις που μπορούν να εισπραχθούν εις επήκοον της τάξης είναι οι εξής:

1) 1,99 ευρώ , διότι δεν υπάρχει διαίρεση του ευρώ μικρότερη από 1 λεπτό (cent) (!)
2) 1 , και ακολουθούν ένα δισεκατομμύριο εννιάρια!
3) 1, 9999999999999999999……….. επ΄άπειρον!

Μόλις κάποιες από αυτές τις πιθανές απαντήσεις ανακοινωθούν στην τάξη, υποβάλλονται στην βάσανο της

δημόσιας κριτικής. Αν κάποια από αυτές τις απαντήσεις δεν προκύψει από την εργασία των ομάδων μπορεί να την αναδείξει ο διδάσκων τεχνηέντως.

Για παράδειγμα:

Αν δεν προκύψει η πιθανή απάντηση 3 , μπορεί να παρέμβει ο διδάσκων και να πει στην ομάδα που έχει πει το 1 ακολουθούμενο από ένα δισεκατομμύριο εννιάρια , «Εγώ λέω ΔΥΟ δισεκατομμύρια εννιάρια!….Μπορείτε να βρείτε κάτι παραπάνω;….»

Κάποιο τότε θα πουν ΤΡΙΑ δις , κάποιοι ΤΕΣΣΕΡΑ και βέβαια είναι σίγουρο ότι η απάντηση «το 1 με άπειρα εννιάρια» θα προκύψει αμέσως…….

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: « Ξέρει κάποιος πόσο κάνει πραγματικά ο αριθμός 1, 999999999999…………….με άπειρα εννιάρια; Αν θυμάμαι καλά (σ.σ. γνωρίζει καλώς!) το έχετε διδαχθεί στην Β΄Γυμνασίου! Είναι ένας δεκαδικός περιοδικός …..Σας λέει τίποτα;

Εδώ , μάλλον δεν θα λάβει καμία απάντηση ο διδάσκων[15] (πλην εξαιρετικής εκτάκτου περιπτώσεως μαθητή) και θα υποχρεωθεί να κάνει το «πείραμα» στον πίνακα.

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: « Να τον βαπτίσουμε χ…..»

Χ=1,999999999999999999999999999……………………

Ποιος είναι ο 10χ;

Εδώ περιμένει απάντηση που κατά 99% θα λάβει. Αν καθυστερήσει η απάντηση πέραν από κάποιο εύλογο χρονικό

[15] δυστυχώς αυτό είναι ένα εμπειρικό δεδομένο το οποίο εύκολα μπορεί να επικυρωθεί με μια απλή έρευνα, παρ΄ότι μπορεί να θεωρείται ως γνωστό από το αναλυτικό πρόγραμμα από την Β΄γυμνασίου.

διάστημα μπορεί να την εκμαιεύσει με την φράση: «θυμηθείτε πώς πολλαπλασιάζομε έναν αριθμό με 10, 100 , 1000 κτλ…..»

Μετά την σωστή απάντηση , φτιάχνει το σχήμα:

10χ = 19,99999999999999999999999999999…………….
- χ= 1,99999999999999999999999999999……………

9χ= 18,00000000000000000000000000000……………

$\Rightarrow 9\chi=18$

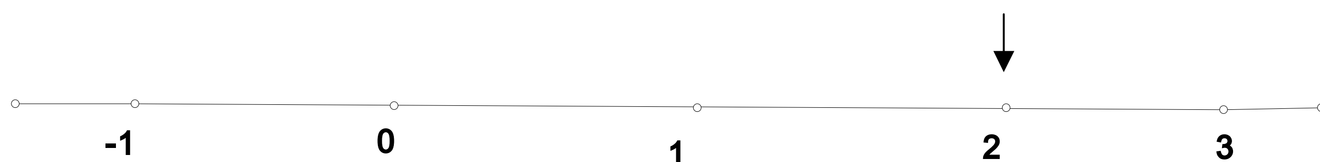
$$\Rightarrow \frac{9x}{9}=\frac{18}{9}$$

$$\Rightarrow x=2$$ (!)

Αλλά από την εκφώνηση ο βασιλιάς έχει αποκλείσει το 2 !

…Άρα δεν έχασε ακόμη το βασίλειό του!………

Εδώ καλούνται οι μαθητές να παρατηρήσουν τι τους κάνει εντύπωση στο αποτέλεσμα. Η προσδοκώμενη απάντηση είναι ότι το αποτέλεσμα δεν είναι ΠΕΡΙΠΟΥ 2 , αλλά ΑΚΡΙΒΩΣ 2!



ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: “Δεν εξηγήσαμε όμως γιατί η απάντηση 1,99 ευρώ δεν είναι παραδεκτή……έχετε κάποιο επιχείρημα ή όχι;»

Αν δεν πάρει κάποια απάντηση (απίθανο αυτό) συνεχίζει:

Τι λέει η εκφώνηση; ……………………………………………

Χρηματική ή ΑΛΛΗ[16] αξία; Έχετε κάποια ιδέα για το τι μπορεί να σημαίνει αυτό;
ΟΜΑΔΕΣ : «Μπορεί να πληρωθεί και είδος κύριε!»
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: « Και ένα είδος μπορεί να έχει αξία όσο θέλουμε πριν από το 2 . Ο Βασιλιάς να ήξερε την λύση και να έβαλε το στοίχημα εκ του ασφαλούς ότι δεν χάνει ποτέ; Αφού αποκλείσαμε το 1 με τα άπειρα εννιάρια πόσα εννιάρια να βάλω εσείς τι λέτε;»
Εδώ αναμένεται να προκληθεί αναστάτωση, καθώς θα πέφτουν νούμερα και αλληλοσυγκρουόμενες απαντήσεις για το πόσα εννιάρια μπορούμε να βάλουμε μετά το 1 ……..[17]
ΟΜΑΔΑ: « Αξία, όση το 1 , ακολουθούμενο από όσα εννιάρια μπορούμε να γράψουμε από την Γη μέχρι τον ήλιο!
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : «συμφωνείτε;»
ΟΜΑΔΕΣ: «Εμείς τόσα κι άλλα τόσα εννιάρια!»
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: «Όσα είπατε όλοι , κι ένα εννιάρι ακόμη δίνω εγώ ! Είναι δικό μου το βασίλειο;»
ΟΜΑΔΕΣ: « Κι άλλα τόσα εμείς παραπάνω!»
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: « Και που θα πάει κύριοι αυτή η βαλίτσα; ΄Οσα και να δώσει κάποιος, κάποιος άλλος μπορεί να δώσει ένα παραπάνω ! Τι κάνουμε; Μπορούμε να βρούμε τέτοιον αριθμό αμέσως πριν τον 2 ;»…………………………………………………………
ΟΜΑΔΕΣ: « Δεν υπάρχει κύριε τέτοιος αριθμός!»
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: «Δεν υπάρχει; Και επειδή δεν μπορούμε να τον βρούμε πάει να πει ότι ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ;[18] ……Μπορεί να υπάρχει και εμείς να είμαστε ανίκανοι να τον βρούμε!……Το ότι δεν

[16] Μια ευρετική νύξη
[17] υπάρχει μια πολλαπλά πρότερη εμπειρία εφαρμογής σε τάξεις αυτής της διδακτικής κατάστασης και μας επιτρέπει να να μην διατυπώσουμε απλώς εικασία για την προσδοκώμενη αντίδραση των μαθητών
[18] αφήνεται εύλογος χρόνος για σύσκεψη , συνεργασία των ομάδων πάντα πριν ο καθηγητής προβεί σε ευρετικές νύξεις.

μπορούμε να τον βρούμε δεν σημαίνει κι ότι δεν υπάρχει!……..Χρειάζεται να το αποδείξουμε!……… Μπορείτε να το αποδείξετε με την μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής στην οποία έχουμε αναφερθεί στην Γεωμετρία ………Να υποθέσουμε τάχα ότι υπάρχει ο πιο μεγάλος αριθμός ΠΡΙΝ το 2 και να καταλήξουμε σε άτοπο!…..Θυμηθείτε και την άσκηση που λύσαμε χθες! [19]

(Αν α<β , τότε α< $\frac{a+\beta}{2}$ <β)

Υποθέστε ότι ο ΠΙΟ ΜΕΓΑΛΟΣ ΠΡΙΝ ΤΟ 2 υπάρχει κι είναι ο α ! Δηλαδή το α<2 και το πιο μεγάλο που υπάρχει πριν το 2 !

Δουλεύουμε στις ομάδες μας……………………………….

Μετά την ανακάλυψη της απόδειξης και του άτοπου, ο καθηγητής θα δώσει έμφαση στην επισήμανση του άτοπου:

> «Υποθέσαμε το α για ΤΟΝ μεγαλύτερο πριν τον 2 και βρήκαμε ΜΕ ΛΟΓΙΚΑ ΒΗΜΑΤΑ έναν ΑΚΟΜΗ μεγαλύτερο, τον $\frac{a+2}{2}$ Αφού κάναμε λογικά βήματα και καταλήξαμε σε αντιφατικό συμπέρασμα σε σχέση με την υπόθεσή μας , τότε φταίει η υπόθεσή μας! Αυτό είναι το άτοπο! Άρα λανθασμένα υποθέσαμε ότι υπάρχει μεγαλύτερος πριν το 2. Δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός λοιπόν !

Και έτσι το ΑΠΟΞΕΙΞΑΜΕ!

---

[19] Πρέπει να έχει προηγηθεί η λύση της άσκησης αυτής στον πίνακα , μέσα στην τάξη, στο προηγούμενο μάθημα και να έχει γίνει επισήμανση στο τι πραγματικά σημαίνει και ποιο είναι το νόημά της. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί ,μόνο αν οι μαθητές αντιληφθούν , ότι η πρόταση αυτή «με λόγια» λέει ότι πάντα ανάμεσα σε δύο αριθμούς μπορώ να βρω κάποιον άλλο και στην περίπτωση της άσκησης το μέσο όρο τους. Συνήθως οι μαθητές μένουν στην επιφανειακή αλγεβρική διατύπωση μιας πρότασης και δεν κατανοούν την πληροφορία που κουβαλάει, ακόμα κι αν έχουν κοπιάσει και έχουν κατορθώσει να την λύσουν. Εδώ είναι υποχρέωση του καθηγητή να αναδεικνύει το σημαντική πληροφορία που κουβαλάει μια πρόταση , αλλά και του αναλυτικού προγράμματος που μια τέτοια πρόταση θα έπρεπε-ίσως- να την έχει λ.χ. στις «εφαρμογές» , κι όχι στις ασκήσεις.

Θέλω να συζητήσουμε τώρα , μέχρι να κτυπήσει το κουδούνι , αν πραγματικά πιστεύατε , ότι δεν υπάρχει προηγούμενος αριθμός από τον 2 . Και ακόμη αν μετά από όλα αυτά , ποιος είναι ο πρώτος αριθμός που συναντάμε ΜΕΤΑ τον 2 .[20]

4.2. Η σύγκρουση των γνώσεων μέσα από την επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος

Τονίσαμε και καταδείξαμε στην εισαγωγή , ότι το ίδιο το άπειρο αποτελεί επιστημολογικό εμπόδιο και μάλιστα από τα πλέον σοβαρά. Η διαίσθηση και το ένστικτο , στην περίπτωση του απείρου συχνά δίνουν ισχυρές λανθασμένες εντυπώσεις που καταγράφονται ως εδραία νοητικά σχήματα στο μυαλό των ανθρώπων . Η ρήξη πρέπει να γίνει μέσω μιας συγκρουσιακής κατάστασης , η οποία να είναι όσο το δυνατόν πιο έντονη , ώστε μέσα από το σοκ της νέας ανακάλυψης να μπορέσει να υποκαταστήσει το λανθασμένο μοντέλο που έχει δημιουργήσει το παιδί στο μυαλό του.

Εδώ οι πραγματικοί R είναι ένα απολύτως διατεταγμένο σύνολο. Το πρότερο σχήμα των φυσικών N είναι επίσης ένα διατεταγμένο και εκεί κάθε φυσικός έχει επόμενο και προηγούμενο . Είναι “φυσικό” να ισχύει το ίδιο και στο R . Μάλιστα , το ότι η αδυναμία εύκολου προσδιορισμού του «προηγουμένου του 2» κατ΄ουδένα τρόπο δεν οδηγεί σε προφανές συμπέρασμα ότι αυτός ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ! Το ίδιο φυσικά ισχύει και για το Q (πάντα ανάμεσα σε δύο ρητούς υπάρχει κάποιος άλλος ρητός) έτσι λοιπόν , η σύγκρουση θα πρέπει να γίνει με το κατάλληλο μοντέλο

[20] Απόπειρα θεσμοθέτησης της νέας γνώσης. Ίσως το σοβαρότερο κομμάτι της διαδικασίας , αφού ο καθηγητής θα καταλάβει αν πέρασε η νέα γνώση , από την

και κατά τον πλέον «δραματικό» τρόπο. Να ανατραπεί το λανθασμένο μοντέλο και στην θέση του να μπει το νέο ή τροποποιημένο . Βεβαίως , υπάρχει ο κίνδυνος λόγω λανθασμένης εισαγωγής, το νέο μοντέλο να μην ανατρέψει ή παλαιό ή και να ….συγκατοικήσει μ΄αυτό , εφ΄ όσον δεν κατορθωθεί να καταδειχθεί η αντιφατικότητα του παλιού με το νέο , με πειστικό τρόπο.

Ο Bachelard έχει ασχοληθεί με αυτά τα προβλήματα της διδακτικής , υποστηρίζοντας επιγραμματικά ότι «μαθαίνουμε ενάντια μιας παλαιότερης γνώσης»

Συγκεκριμένα,προβληματίσθηκε με τα επιστημολογικά εμπόδια τα οποία θεωρεί ως μια «συντηρητική λειτουργία» του νου στην διαδικασία απόκτησης γνώσης. Στα πλαίσια αυτού του προβληματισμού , αντιπαραθέτει τις έννοιες «συντηρητικό ένστικτο» και «επιμορφωτικό ένστικτο» . Συγκεκριμένα, υποστηρίζει, ότι το συντηρητικό ένστικτο ανατρέχει σε οικείες απαντήσεις, υποστηρίζει την ήδη υπάρχουσα τάξη, στηρίζεται σε εμπειρικές γνώσεις που (στο διάβα του χρόνου) έχουν αποδειχθεί αποτελεσματικές , καλλιεργεί συνήθειες και υποστηρίζει προκαταλήψεις. Η συνήθεια είναι από τα κυριότερα εμπόδια στην επιστημονική πρόοδο.[21]

Αντίθετα , το επιμορφωτικό ένστικτο, δίνει αξία στις ερωτήσεις, επιμένει στην επανεξέταση των καταστάσεων, στηρίζεται στην έρευνα και διερωτάται ακόμη και στην πλέον στοιχειώδη γνώση.[22]

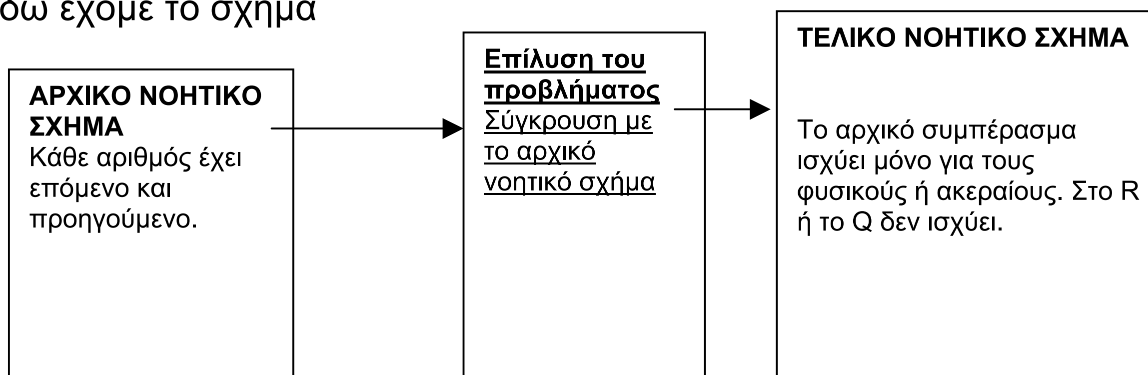
συζήτηση που θα ακολουθήσει.

[21] Να προσθέσουμε στον ισχυρισμό του Bachelard ότι αυτό κατά μείζονα λόγο αυτό ισχύει και στην διδακτική , η οποία βλέπεται και από την σκοπιά της κατακτημένης τέχνης από τους –ιδίως μεγαλύτερους ηλικιακά – διδάσκοντες , πράγμα που δεν ευννοεί τους νέους πειραματισμούς και άρα τα νέα αποτελεσματικότερα ίσως μέσα στην προσέγγιση της διαδικασίας απόκτησης γνώσης.

[22] «Γνωσιολογική και διδακτική προσέγγιση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών» σελ. 57

Ο J. Piaget χρησιμοποιεί τον όρο «αφομοίωση» (assimilation) για να περιγράψει την διαδικασία ενσωμάτωσης των νέων δεδομένων στις ήδη υπάρχουσες δομές γνώσης και στον όρο «συμμόρφωση» (accommodation) όταν αναφέρεται στην διαδικασία τροποποίησης των γνωστικών δομών του ανθρώπου. Θεωρεί μάλιστα την τροποποίηση και την συμμόρφωση ως συμπληρωματικές διαδικασίες.[23]

Εδώ έχομε το σχήμα



4.3. Οι διδακτικές καταστάσεις που δημιουργούνται από την διαδικασία επίλυσης του συγκεκριμένουπροβλήματος

Κατά την διαδικασία μάθησης ενός μαθηματικού αντικειμένου, υπάρχουν σύμφωνα με τον Brousseau (1986) τέσσερις διαφορετικές καταστάσεις[24]. Κατά την διάρκειά τους, η γνώση που παράγεται ή χρησιμοποιείται , δεν έχει την ίδια λειτουργία. Λόγου χάριν, μπορεί να εμφανισθεί ως απλή άποψη ή τεκμηριωμένο επιχείρημα. Η γνωστική εξέλιξη κατά την διάρκεια

[23] «Γνωσιολογική και διδακτική προσέγγιση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών» σελ. 30

[24] «Γνωσιολογική και διδακτική προσέγγιση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών» σελ.49

των φάσεων μιας διδακτικής κατάστασης επιτυγχάνεται , μέσα από διαδικασίες αντιπαραθέσεων, επικυρώσεων, ή ανασκευών. Συγκεκριμένα έχομε :

- καταστάσεις δράσης , όπου ο μαθητής , με αφορμή μια ενέργεια που πραγματοποιεί, έχει την ευκαιρία να εκφράσει κάποιες απόψεις που αφορούν μαθηματικές ιδιότητες , έννοιες και διαδικασίες που αντικατοπτρίζουν το επίπεδο των γνώσεών του.

Στο συγκεκριμένο πρόβλημά μας, η πρώτη αυτή κατάσταση εμφανίζεται μέσα από την συμμετοχή του μαθητή στην ομάδα που του δίνει το έναυσμα να εκφράσει εικασίες ή και απαντήσεις σχετικά με το μεγαλύτερο ποσό ευρώ που δεν φθάνει όμως τα 2 ευρώ. Καλείται να γράψει την (μη προφανή) απάντηση, η οποία στο πρόβλημα διατυπώνεται με ανοικτό τρόπο[25]

- καταστάσεις διατύπωσης . Σύμφωνα με αυτές, οι γνώσεις που εφαρμόστηκαν στην προηγούμενη φάση της δράσης, καθίστανται αντικείμενο διαπραγμάτευσης της ομάδας μέσα από μια όσο το δυνατόν λεκτική διατύπωση. Αν η διατύπωση δεν επιτρέπει την μετάδοση του επιθυμητού μηνύματος, τότε επανεξετάζεται , όχι μόνο η ίδια η διατύπωση, αλλά και η υποκείμενη γνώση.

---

[25] Τα προβλήματα κατατάσσονται σε κατηγορίες ανάλογα με την αρχική κατάσταση διατύπωσης, σε ανοικτής και κλειστής διατύπωσης και σε σχέση με τον τελικό στόχο , αν είναι ανοικτού στόχου ή κλειστού με την έννοια της σαφούς ή όχι διατύπωσης . Έτσι έχουμε τα προβλήματα τύπου (Κ, Κ) δηλ. κλειστής διατύπωσης και κλειστού στόχου («παραδοσιακά») (Κ,Α) , (Α,Κ) , (Α,Α) Η τελευταία κατηγορία είναι αυτό που λέγεται ανοικτό πρόβλημα και παρουσιάζει ενδιαφέρον ως το μέσον που θα διδάξει την «θεωρία» στους μαθητές μέσω των καταστάσεων και διαδικασιών επίλυσής του. Το συγκεκριμένο πρόβλημα που έχουμε παρουσιάσει , είναι ανοικτής διατύπωσης και κλειστού στόχου. Αν για παράδειγμα δεν υπήρχε στην εκφώνηση η φράση « ή άλλη αξία» θα το καθιστούσε ανοικτότερο καθώς η πιθανή απάντηση 1,99 ευρώ θα έπρεπε να γίνει αποδεκτή ως μία λύση. Το να καταστεί όμως ένα πρόβλημα περισσότερο ανοικτό ή κλειστό , έχει να κάνει με τους στόχους που έχει θέσει ο διδάσκων, τον χρόνο που έχει στην διάθεσή του κτλ.

Στο πρόβλημά μας, μέσω των ομάδων, μπορεί να γίνει και μια επεξεργασία του μη προφανούς αποτελέσματος ότι 1,9999….=2

Μπορούν οι ομάδες να διατυπώσουν και την γενικότερη πρόταση , πως κάθε περιοδικός είναι ρητός , όπως και την διαδικασία της (αυτόματης) μετατροπής δεκαδικού τερματιζόμενου σε ρητό ή της αλγοριθμικής διαδικασίας για την μετατροπή δεκαδικού τερματιζόμενου σε ρητό. [26]

- <u>καταστάσεις επικύρωσης</u>

Σύμφωνα με αυτές οι υποθέσεις και οι εικασίες, δίνουν την θέση τους στην επιχειρηματολογία . οι καταστάσεις επικύρωσης , απαιτούν ένα ορισμένο επίπεδο βεβαιότητας , χωρίς ωστόσο να είναι απαραίτητες οι αυστηρές αποδείξεις.

[26] Στο πρόβλημα όμως την υπενθύμιση της απόδειξης ότι 1,99999….=2 την κάνει ο εκπαιδευτικός στην δυστυχώς εξαιρετικά πιθανή περίπτωση να μην την γνωρίζει κανείς μαθητής , παρ΄ότι έχει αυτή διδαχθεί στην Β΄Γυμνασίου.
Αυτό το πρόβλημα ίσως θα μπορούσε να ειδωθεί συνολικά και στην Β' Γυμνασίου να δοθούν στην οικεία υπάρχουσα παράγραφο, καταγραφές άμεσων απορορροιών από την ύλη που διδάσκεται εκεί και για τις οποίες δεν γίνεται καμία νύξη.
Συγκεκριμένα, πρέπει να επισημανθεί ότι λ.χ.
1,5=1,500000000………=1,499999999999……….
Και επίσης να δει το παιδί το αποτέλεσμα και με την οπτική του ότι

$$1+\frac{4}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\frac{9}{10^4}+\ldots\ldots\ldots=1,5$$

ουσιαστικά έχει κάνει μια κατάκτηση γνώσης (Έχει αθροίσει την σειρά!) με μια απλή διαδικασία επίλυσης πρωτοβάθμιας εξίσωσης.
Για όλα τα προηγούμενα όμως δεν έχουμε καμία νύξη στο διδακτικό βιβλίο. Μπορεί να έχει κριθεί ότι δεν το επιτρέπει η –ίσως- η πνευματική ωριμότητα των μαθητών (βεβαίως μπορεί να υπάρχει κι ο λόγος της ποσότητας ύλης ή άλλος) αλλά κατά την γνώμη του γράφοντος ο κάθε μικρός μαθητής της Β΄γυμνασίου , μπορεί να κατακτήσει το άθροισμα των απείρων όρων γεωμετρικής προόδου με λόγο ½ , αν υποθέσουμε ότι το θρανίο έχει μήκος 1 μέτρο και να κλιθεί σε μια δραστηριότητα του τύπου «προχωρώ μέχρι την μέση του μήκους του θρανίου, (με το δάκτυλο) και μετά μέχρι την μέση της μέσης και προσθέτω στο προηγούμενο κ.ο.κ. μέχρι να κάνει «σειμειωτόν» (μπορεί εδώ σκόπιμα ο δάσκαλος να βάλλει και πάνω από 10 βήματα για να δείξει ότι «όσες πράξεις κι αν κάνουμε δεν φθάνουνε το 1 , αλλά το «πλησιάζουμε όσο κοντά θέλουμε» και «με άπειρες πράξεις , αν ήταν δυνατόν να τις κάνουμε, το φθάνουμε»

Στο πρόβλημά μας , αυτό γίνεται με την παρουσίαση των «πορισμάτων» κάθε ομάδας και με την αποδοχή της υπόλοιπης τάξης.

- Καταστάσεις θεσμοθέτησης,

Αποσκοπούν στο να δώσουν τον χαρακτήρα κοινωνικά αναγνωρισμένης γνώσης , σε ορισμένες από τις προσωπικές γνώσεις που χρησιμοποιήθηκαν κατά την διάρκεια των προηγούμενων φάσεων.

Στο πρόβλημά μας, η συζήτηση που γίνεται στο τέλος της διδακτικής ώρας αποσκοπεί και αναδεικνύει, αυτή την διδακτική κατάσταση.

Ο ίδιος ερευνητής, μελέτησε και το λεγόμενο «διδακτικό συμβόλαιο» που πρέπει να τηρούν οι μαθητές ως προς την επίλυση των προβλημάτων και που στην ουσία συνίσταται από ένα σύνολο κανόνων οι οποίοι καθορίζουν τους ρόλους και τις δραστηριότητες όλων όσων συμμετέχουν στην διδακτική πράξη. Συγκεκριμένα, το διδακτικό συμβόλαιο περιλαμβάνει κυρίως κανόνες υπονοούμενους και των οποίων η διδακτική σκοπιμότητα δεν είναι πάντοτε προφανής: Για παράδειγμα:

(ι) ποίο το περιεχόμενο των εννοιών «λύνω» «αποδεικνύω» « επαληθεύω»;

(ιι) Ποίος είναι ο ρόλος των ερωτήσεων « Τι μπορούμε να συμπεράνουμε;» «Τι πρέπει να χρησιμοποιήσουμε;» «Τι παρατηρείτε;» «Είναι αρκετά αυστηρή η απόδειξη;»

(ιιι) Πότε χρησιμοποιούμε εκφράσεις του τύπου «είναι προφανές…»

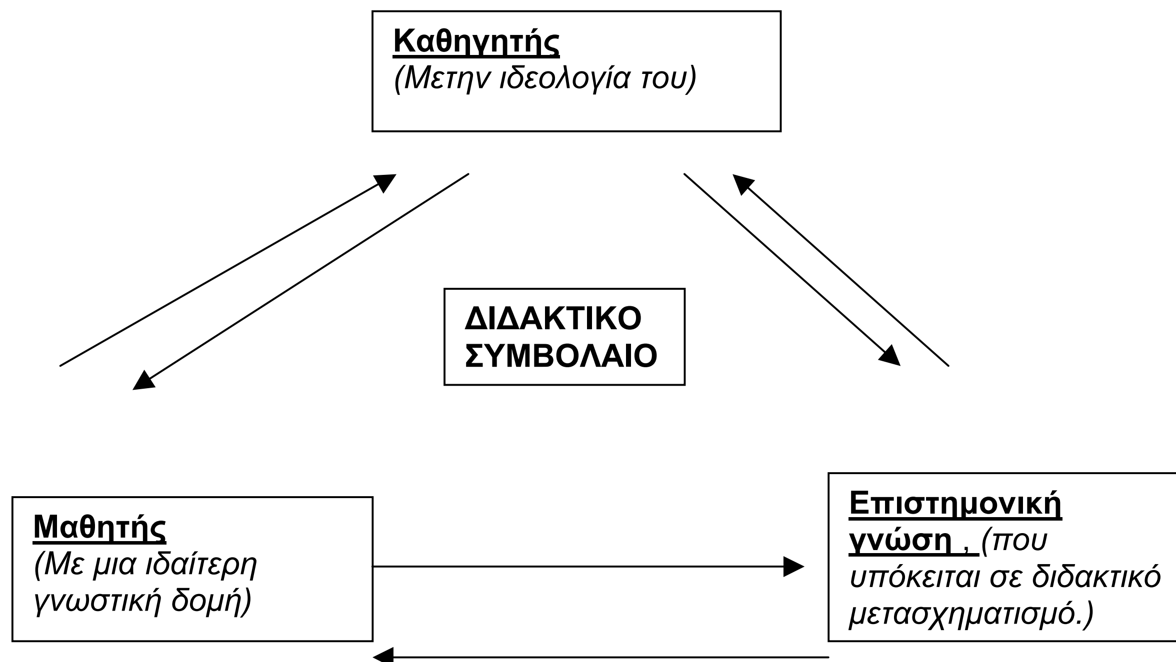
(ιυ) Τι σημαίνει το μήνυμα που στέλνει στην αρχή κάθε χρονιάς ο καθηγητής λέγοντας « Εγώ θέλω….»

(υ) γιατί ο μαθητής στο άκουσμα «πρόσεχε!» του καθηγητή αντικαθιστά το +17 που έγραφε με το –17 ή το 2χ με το $χ^2$;
(υι) Τί σημαίνουν τα σύμβολα «Ε» «χ» ή «Π» για τους μαθητές;
(υιι) Τι σημαίνει απλοποιώ , υπολογίζω , παραγοντοποιώ; Που τελειώνει και πού αρχίζει μια τέτοια διαδικασία;
(ιιχ) Τι σημαίνει και πως αντιλαμβάνεται την προτροπή του δασκάλου του ένας μαθητής «φτιάξε ένα παρόμοιο πρόβλημα;»
(ιυ) Η γραφική παράσταση που για έναν καθηγητή απλοποιεί ένα πρόβλημα , η ίδια μήπως αποτελεί ένα επιπλέον πρόβλημα για τον μαθητή; το ίδιο είναι για τους μαθητές το «-4» και το « ο αντίθετος του 4;»

Τι γίνεται με το πρόβλημα της ηλικίας του καπετάνιου; [27] Τι γίνεται με τις αντιλήψεις των μαθητών ότι τα μαθηματικά θέλουν απομνημόνευση; Τι κάνομε με την ευρύτατα διαδεδομένη αντίληψη ότι οι ασκήσεις λύνονται ή σε λίγα λεπτά ή καθόλου;[28] Υπάρχουν ασκήσεις στα βιβλία για την λύση των οποίων δεν χρησιμοποιούνται όλα ή ορισμένα από τα δεδομένα τους; Για τι ο δάσκαλος μέσα στα πλαίσια του ατύπου αυτού συμβολαίου

[27] Αποτελεί και το «αγαπημένο θέμα» του υποφαινομένου, και το θέτει κάθε χρονιά που τυχαίνει να μπαίνει στην Α΄γυμνασίου. Ειδικά φέτος το έθεσε με μια με μια ουσιαστική –όπως ενόμιζε-πειραματική παραλλαγή: «Το πλοίο έχει 3 μούτσους , 7 ναύτες και 7 επιβάτες. Πόσων χρονών είναι ο καπετάνιος;»
Είχε απορία να δει αν ένας δεκαεπτάχρονος εφάνταζε για καπετάνιος! Και βέβαια η φαντασία είναι δεν μπορεί να έχει όρια! Τα μισά και πλέον πρωτάκια , έκαναν πρώτα έναν πολλαπλασιασμό του 3 με το 7 και στην συνέχεια προσέθεσαν το 7 . ώστε το 28 να φαντάζει ως μια αληθοφανής ηλικία καπετάνιου! Ένας μάλιστα πλειοδότησε λέγοντας 7χ7=49 , 49+3=52 η ηλικία του καπετάνιου.
[28] Ο υποφαινόμενος προβληματίσθηκε αρκετά όταν άκουσε την ίδια φράση από έναν πραγματικά καταξιωμένο συνάδελφο των φροντιστηρίων: «Το λέω και στους μαθητές μου….Μια άσκηση ή που θα αρχίσεις την λύση της σε 10 λεπτά , ή που δεν λύνεται καθόλου , έτσι, ασχοληθείτε με την θεωρία που μπορείτε να την θυμηθείτε!….» προφανώς στα πλαίσια των εξετάσεων με τον περιορισμένο χρόνο , είχε δίκιο, μόνο που το «έθος» των εξετάσεων οι «πρακτικές» πληροφορίες και οι τυφλοσούρτες επηρεάζουν φαίνεται και την διδακτική πρακτική πολύ περισσότερο από όσο είναι εκ πρώτης όψεως προφανές……

προσδιορίζει το τι επιτρέπεται, το τι απαγορεύεται, τι αναμένεται κτλ.;



Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται η δομή της έννοιας του διδακτικού Συμβολαίου και η δυναμική της.

Φαίνεται λοιπόν ότι το διδακτικό συμβόλαιο, δεν αφορά μόνο την διδασκαλία, αλλά είναι το χτίσιμο μιας σχέσης όπου φανερά ή σιωπηλά , ο κάθε συντελεστής, ο δάσκαλος και ο μαθητής , έχει την ευθύνη να συνεισφέρει με κάποιους τρόπους ή είναι υπεύθυνος απέναντι στους άλλους.

4.4. Ποιο είναι το «διδακτικό συμβόλαιο» κατά Brousseau για το πρόβλημα;[29]

[29] Ιφ. Νένου : «Το διδακτικό συμβόλαιο και τα προβλήματα» Τετράδια διδακτικής των μαθηματικών., Νο 2 , 1989

1) ένα συνηθισμένο σχολικό πρόβλημα , δέχεται μία και μόνο μία απάντηση.
2) Για να φθάσουμε σε αυτή την απάντηση:

-Όλα τα δεδομένα πρέπει να χρησιμοποιηθούν
-καμία ένδειξη δεν είναι απαραίτητη
-η κατάλληλη χρήση των δεδομένων γίνεται κατά ένα τρόπο που θέτει σε ενέργεια οικείες διαδικασίες, (Αριθμητικές πράξεις, μέθοδος των τριών κτλ.) που πρέπει να συνδυασθούν με τον κατάλληλο τρόπο.

Και βέβαια αυτή η προβληματική έχει να κάνει με την αναγκαιότητα εισαγωγής στην διδακτική πράξη και ανοικτών «μη συνηθισμένων» προβλημάτων.

4.5 . Η ανακαλυπτική μάθηση (discovery learning) του J . Brouner

Βασικά άποψη του Brouner είναι ότι ο δάσκαλος δεν θα πρέπει να παρέχει έτοιμες γνώσεις στους μαθητές, αλλά να δημιουργεί σε αυτούς προβληματικές καταστάσεις , που θα τους ωθούν στην ανακάλυψη της γνώσης. Για να παρακινούνται όμως οι μαθητές προς το πρόβλημα, θα πρέπει να δίνει ο δάσκαλος μορφή ανάλογη προς το πνευματικό τους επίπεδο, και επίσης να τους προδιαθέτει ευνοϊκά προς την νέα μάθηση, δημιουργώντας με ερωτήσεις και νύξεις την απορία την περιέργεια και την αμφιβολία σ΄ αυτούς. Αντί λοιπόν να παράγει ο δάσκαλος μαθητές –κινητές βιβλιοθήκες, χρησιμότερο για τους ίδιους και την κοινωνία θα είναι να συμμετέχουν στην διαδικασία της παραγωγής της γνώσης. Χρησιμοποιώντας δε την διδακτική τεχνική της επαγωγικής σκέψης, παρέχει στους μαθητές του παραδείγματα και

λεπτομέρειες , και τους παρωθεί να ανακαλύψουν τις γενικές αρχές.[30]

4.6. Τα πλεονεκτήματα της εργασίας των μαθητών καθ΄ ομάδες.

Σύμφωνα με τον Piaget, η κάθε γνώση, δεν απορροφείται άμεσα από το υποκείμενο, αλλά οικοδομείται μέσα από ένα πλαίσιο κοινωνικών αλληλεπιδράσεων και στα κάθε είδους ερεθίσματα που δέχονται απ΄ αυτό. Μέσα από την συλλογική εργασία, αναπτύσσεται μια σύνθετη διεργασία σκέψης και πρακτικής που ενδυναμώνει την ατομική και ομαδική τους συνεισφορά.

Τα πλεονεκτήματα είναι :

Ενεργοποιεί τους μαθητές, βγάζοντάς τους από την παθητική στάση ακρόασης. Ωθεί σε αυτενέργεια και πρωτοβουλίες . Διεγείρει προς μια συνεχή πνευματική δραστηριότητα , οξύνει την κριτική σκέψη κι ευστροφία, και καλλιεργεί μια στάση αυτογνωσίας και κριτικής.

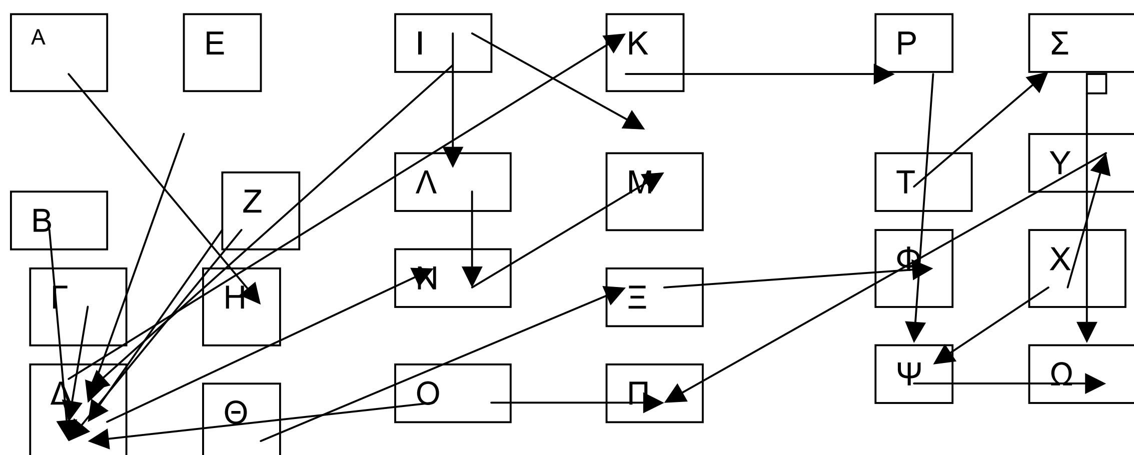
Επίσης , η εργασία καθ΄ ομάδες, περιορίζει ανταγωνιστικές και και εγωϊστικές στάσεις, αναπτύσσει τον αλτρουϊσμό, σφυρηλατεί την αλληλεγγύη , την αλληλοβοήθεια και τον αλληλοσεβασμό. Αναπτύσσει την προσωπική και ομαδική ευθύνη και οπλίζει τους μαθητές με τεχνικές και μεθόδους εργασίας. Ακόμα, οι αδιάφοροι, παρακινούνται στην κοινή προσπάθεια, συνεργάζονται και αυτοβελτιώνονται.

Ο καθορισμός των ομάδων κατά όσον αφορά την αριθμητική και ποιοτική τους σύσταση, είναι μια πολύ λεπτή διαδικασία και σε

[30] Θ. Τριλιανός: «Μεθοδολογία της διδασκαλίας ΙΙ» ΑΘΗΝΑ 1992

κάθε περίπτωση πρέπει να καθοριστεί από την αρχή της χρονιάς και σε συνεννόηση με τους άλλους καθηγητές της τάξης. Κατά όσον αφορά τον αριθμό, το θέμα είναι λυμένο κατά σαφή τρόπο , καθώς από ερευνητές έχει διαπιστωθεί ότι ομάδες 3-5 ατόμων αποτελούν την ιδανική αριθμητική σύσταση. Κατά όσον αφορά την ποιοτική σύσταση θα πρέπει να ληφθούν υπ΄όψιν οι προσωπικές προτιμήσεις των ιδίων των μαθητών (Με διακριτικό όμως τρόπο) και βέβαια η ατομική επίδοση στο των μαθητών. (Επίσης με διακριτικό τρόπο) Ο εκπαιδευτικός , πρέπει να είναι σε θέση να γνωρίζει τις όποιες ιδιαιτερότητες των μαθητών του και βέβαια σε αυτό μπορεί να ζητήσει την αρωγή των άλλων εκπαιδευτικών.

Μια πρώτη πρακτική που προτείνεται να ακολουθείται στην αρχή κάθε χρονιάς, είναι η χωροταξική κατανομή των μαθητών , η οποία προηγείται της κατανομής καθ΄ομάδες. Σύμφωνα με αυτή, κάθε μαθητής καλείται να γράψει σε ένα χαρτάκι , με ποιόν μαθητή θα ήθελε να κάθεται στο ίδιο θρανίο εκτός απ΄αυτόν με τον οποίον ήδη κάθεται. Με αυτόν τον τρόπο ο κάθε μαθητής συγκεντρώνει έναν βαθμό προτιμήσεων , ο οποίος είναι ένας δείκτης δημοφιλίας του κάθε ενός μαθητή. Καλό είναι να συμβουλευθεί ο καθηγητής και τα αποτελέσματα των εκλογών για τις μαθητικές κοινότητες τα πρακτικά των οποίων φυλάσσονται στο γραφείο του Δ/ντη του σχολείου. Στην συνέχεια ο εκπαιδευτικός καταστρώνει το εξής διάγραμμα σημειώνοντας τις προτιμήσεις «από ποιόν σε ποιόν» με βέλη:



Για παράδειγμα στο παραπάνω διάγραμμα , ο μαθητής Δ , προφανώς είναι ο πλέον δημοφιλής, είναι τρόπον τινά το «επίκεντρο της τάξης» και δεν απομένει , να γίνει πραγματικά το κατά κυριολεξίαν κέντρο βάρους της τάξεως , τοποθετούμενος στο μέσον της αίθουσας διδασκαλίας , ώστε οι αποστάσεις να είναι οι ελάχιστες (Ενδιαφέρον πρόβλημα!) . Στην πράξη, βεβαίως αυτό πρέπει να γίνει στην αρχή της χρονιάς και να είναι επαρκώς ενημερωμένος ο καθηγητής. Λίγο δύσκολο πρακτικά , αλλά όχι κι ακατόρθωτο, αν υπάρχει ο προγραμματισμός εκ των προτέρων.

5. Κάποιες άλλες διδακτικέςπροτάσεις σε σχέση με μετρήσεις μεγάλων αριθμών ή του απείρου.

5.1. Μια διδακτική πρόταση για την Α΄γυμνασίου με διαδικασίες επίλυσης προβλήματος : (Περιληπτική παρουσίαση)

Δίδονται στις ομάδες 4-5 μαθητών ισόποσες κοινές βούρτσες , με την προτροπή να δουλέψουν οι μαθητές ομαδικά και να κατορθώσουν («αν μπορείτε!») να μετρήσουν πόσες τρίχες έχει η κάθε μία. Μπορεί και να «θεσμοθετηθεί» βραβείο για την ομάδα που θα κατορθώσει πρώτη να το πετύχει με κέρασμα τυρόπιτας στο κυλικείο.

Προηγουμένως ο καθηγητής έχει φροντίσει :

i)Να εξασφαλίσει την πίστωση των 8 ευρώ από την Σχολική επιτροπή που κοστίζουν οι 5 περίπου βούρτσες που θα χρειασθούν για το πείραμα.

ii)Να έχουν όλοι οι μαθητές ψαλιδάκι αλλά και χάρακα.

Μετά από την έναρξη της δραστηριότητας αναμένεται :

Περίπτωση 1: Η υποψήφια νικήτρια ομάδα δραστηριοποιείται , κόβει τον πρώτο θύσανο με τις τρίχες, τις μοιράζονται πρόχειρα στα 5 ματσάκια, μετρά ο κάθε ένας τις δικές τους, τις προσθέτουν και στην συνέχεια πολλαπλασιάζουν τον αριθμό που βρίσκουν με τον αριθμό των θυσάνων που έχει κι αυτός προκύψει είτε με πρόσθεση, είτε με πολλαπλασιασμό (αριθμός θυσάνων κατά μήκος Χ αντίστοιχο κατά πλάτος)

Περίπτωση 2: Όλες οι άλλες περιπτώσεις που θα μπορούσαν να προκύψουν ! Αυτή περιλαμβάνει όλες τις παραλλαγές που θα

μπορούσαν να βρουν οι μαθητές και που μπορεί να φανταστεί κάποιος εκ των προτέρων ή ακόμα (πολύ σπάνιο εδώ αλλά όχι κι απίθανο)

Στην συνέχεια οι απαντήσεις ανακοινώνονται δημόσια και παρατίθεται η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε.

Οι απαντήσεις υποβάλλονται σε κριτική : Λ. χ. Γιατί δεν μέτρησαν όλες τις τρίχες και μόνο ενός θυσάνου; έχουν όλοι οι θύσανοι τον ίδιο αριθμό τριχών ; (ΟΧΙ!) παρ όλα ταύτα το βραβείο της τυρόπιτας πρέπει να το πάρουν; μήπως είναι βλακεία να κάτσουμε να τις μετρήσουμε όλες;

Από την συζήτηση μπορεί να αναδειχθεί ότι καταστρέφουμε την βούρτσα και δεν κερδίζουμε σε μεγάλη ακρίβεια! Άρα το βραβείο πρέπει να πάει σε αυτή την ομάδα παρ΄ότι δεν μέτρησε πραγματικά όλες τις τρίχες……..

Μετά την δραστηριότητα, ανάλογα με τις δυνατότητες της τάξης, ο διδάσκων μπορεί να την κατευθύνει προς την δεύτερη δραστηριότητα που αυτή την φορά θα είναι θεωρητική .

Να βρουν και να διατυπώσουν έναν αξιόπιστο τρόπο σχετικά με το πώς θα μπορούσαμε να μετρήσουμε τα μαλλιά της κεφαλής μας.(!)

Αναμενόμενες απαντήσεις : Χωρίζουμε τα μαλλιά μας σε όμοιες κοτσίδες μετράμε την μία και μετά κάνουμε έναν πολλαπλασιασμό με τον αριθμό των κοτσίδων. (Για κορίτσια κυρίως)

Ζωγραφίζουμε ίσα τετραγωνάκια στο κεφάλι ενός κουρεμένου και μπαίνουμε στον κόπο να μετρήσουμε το ένα . Έπειτα μετράμε τα τετραγωνάκια και κάνουμε έναν πολλαπλασιασμό.

Μπορούν να προκύψουν κι άλλες απίθανες απαντήσεις που κρίνονται από την τάξη.

Μετά από την συζήτηση κι επικύρωση των αποτελεσμάτων από την τάξη, μπορεί να δοθεί για εργασία ατομική (οι ομάδες είναι δύσκολο να λειτουργήσουν εκτός σχολείου, εκτός αν κριθεί ότι αυτό είναι δυνατόν) το εξής πρόβλημα:
«Αν η Γη αποτελείτο από στραγάλια, πόσος θα ήταν ο αριθμός τους; »
(Στο σχολείο υπάρχει σχετικός πίνακας των πλανητών –και της Γης -με γεωμετρικά χαρακτηριστικά τους (εμβαδόν –όγκο –ακτίνα) Μπορεί να δοθεί και μια προθεσμία 10 ημερών για να το σκεφθεί καλά μαθητής.

Η επιτυχία και σε αυτή την εργασία θα πρέπει να είναι κάποιο σημαντικό κριτήριο ότι κατακτήθηκε η έννοια των πολύ μεγάλων αριθμών , τους οποίους ο μαθητής θα μπορεί να αντιμετωπίζει χωρίς συμπλέγματα και δέος μπρος το μέγεθος.
Στην Δευτέρα Γυμνασίου και στα πλαίσια του μαθήματος της Χημείας , θα μπορούσε σε κάποια άσκηση να ενταχθεί και κάποια άσκηση που όταν διδάσκεται ο αριθμός Avogadro , ανάμεσα στ΄άλλα , να υπάρχει και ένα πρόβλημα του τύπου:
«Η Ζάχαρη έχει Μ.Τ. $C_{11}H_{12}O_{22}$ Αν το 1 κιλό ζάχαρη κοστίζει 1 ευρώ , να βρεθεί πόσα ευρώ κοστίζει 1 μόριο ζάχαρης!»
Δίνονται τα Α.Β : O=16 , H =1 , C=12
Η ενθάρρυνση της χρήσης υπολογιστικής μηχανής , είναι προς την κατεύθυνση της ευκολότερης αντιμετώπισης τέτοιων προβλημάτων . (Η διαίρεση 1/ 3χ $6{,}023X10^{23}$ δεν θα πρέπει να αποθαρρύνει τον μαθητή)

5.2. Επισημάνσεις για την Β' Γυμνασίου

Επίσης στην Β΄γυμνασίου μπορούν να γίνουν οι εξής επισημάνσεις στις οικείες ενότητες του διδακτικού βιβλίου:

- Οι δεκαδικοί αριθμοί οι τερματιζόμενοι που τόσο πολύ χρησιμοποιούμε καθημερινά , είναι η ελάχιστη κλάση των αναγώγων κλασμάτων της μορφής $\frac{a}{2^n 5^m}$. όλες οι άλλες (διαισθητικά πάρα πολύ περισσότερες) περιπτώσεις παριστάνουν δεκαδικούς περιοδικούς.
- Οι τερματιζόμενοι δεκαδικοί είναι ουσιαστικά οι περιοδικοί με περίοδο το 0 ή και το 9 (για το 9 δεν γίνεται νύξη στο δ. βιβλίο)
- Η ισότητα 1,999999…..=2 μας δείχνει έναν πεπερασμένο αριθμό σπασμένο σε άπειρα κομματάκια .

5.3. Για την Α΄Λυκείου

Στην Α΄λυκείου μπορούν να προστεθούν στο κεφάλαιο των εξισώσεων και εφαρμογές του τύπου:

Η άπειρη παράσταση $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}} \;+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$

Αν παριστάνει κάποιον αριθμό , μπορούμε να την χειριστούμε ως εξής:

Την βαπτίζουμε χ:

$$X=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}+\ldots\ldots\ldots\ldots} \quad \textbf{τότε}$$

$$X^2=2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}+\ldots\ldots\ldots\ldots} \quad \textbf{τότε}$$

$$X^2-2=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}+\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

Όμως το δεύτερο μέλος είναι ίσο με το αρχικό Χ (!!!)

Δηλαδή , $X^2-2=X$

Ή $X^2-X-2=0$

Από όπου βρίσκω ότι X=-1 ή X=2

Η ρίζα Χ=–1 απορρίπτεται, διότι η άπειρη παράστασή μου είναι προφανώς θετική και ισούται –τελικά- με την άλλη ρίζα , το 2.

Ένα αξιοπρόσεκτο χαρακτηριστικό της άπειρης αυτής παράστασης είναι ότι οποιοδήποτε κομμάτι της δεξιά από κάθε 2 στην ουσία είναι ίδιο με ολόκληρο τον εαυτό της , αφού από την άπειρη παράσταση , όσα αρχικά τμήματα και να αποκόψουμε το εναπομένον τμήμα θα μένει ίσο με το αρχικό!

Με άλλα λόγια έχουμε μπροστά μας το εκπληκτικό αποτέλεσμα , ότι υπάρχουν «μαθηματικά αντικείμενα» που **το μέρος είναι ίσο με το όλο!**

Την παραπάνω διαπίστωση δεν μπορεί να την δεχθεί ή να την φανταστεί το ανθρώπινο μυαλό, αφού από τον κόσμο των πραγματικών μας εμπειριών αν από ένα αντικείμενο κόψω ένα

κομμάτι του αυτό που θα μείνει δεν μπορεί να είναι ίσο με το αρχικό κομμάτι πριν το κόψω!
Αυτό το εκπληκτικό συμβαίνει σε ορισμένα[31] άπειρα μαθηματικά αντικείμενα σαν την προηγούμενη παράσταση!…………

Άσκηση: Μπορείτε να χειριστείτε μήπως με τον ίδιο τρόπο και την παράσταση :

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ldots\ldots\ldots\ldots}}}}}}.$$

(Είναι ο λόγος της χρυσής τομής!)

5.3. Ένα πρόβλημα για την Β΄Λυκείου:

«Μέσα στην τάξη Φτιάχνουμε ένα κύβο. Στην συνέχεια έναν άλλο με μισό μήκος ακμής και τον βάζουμε πάνω στον άλλο. Στην συνέχεια φτιάχνουμε έναν τρίτο κύβο με την μισή ακμή του δευτέρου και τον θέτουμε πάνω του. Αυτό υποθέτουμε ότι μπορούμε να το κάνουμε ασταμάτητα επ΄άπειρον .
Θα φθάσουμε στο ταβάνι της αίθουσάς μας ή όχι;»

[31] Βεβαίως αυτά τα «αντικείμενα» λέγονται μορφοκλασματικά αντικείμενα (Fractals) και εκείνο για το οποίο πρέπει να αναρωτηθούμε , είναι αν πρέπει να εισαχθεί έστω και ως νύξη για τις ιδιοτροπίες του άπειρου , την στιγμή που στο διαδύκτυο και σε κάθε υπολογιστή , υπάρχουν δωρεάν προγράμματα παραγωγής φράκταλ σχεδίων και ο μαθητής έρχεται σε επαφή μαζί τους χωρίς να ξέρει για την δομική τους ιδιότητα , δηλαδή της αυτοομοιότητας.

Και το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να εισαχθεί με διαδικασίες επίλυσης προβλήματος , με σχετικό φύλλο εργασίας , όπου οι μαθητές καθ΄ομάδες καλούνται να απαντήσουν στο πρωταρχικό ερώτημα του προβλήματος. Οι μαθητές μπορούν να έχουν ήδη διδαχθεί το άθροισμα απείρων όρων της φθίνουσας γεωμετρικής προόδου με λόγο λ : $|\lambda|<1$.

Η απάντηση στο ερώτημα δεν είναι προφανής , ούτε μπορεί να προκύψει διαισθητικά ή ενορατικά αφού η ενόραση ή διαίσθηση σε σχέση τουλάχιστον με το άπειρο και ιστορικά και διδακτικά έχει αποδειχθεί ότι δίνει λανθασμένες εντυπώσεις[32]. Είναι βέβαιο ότι θα προκύψει αντιπαράθεση απόψεων μέσα στην τάξη , τις οποίες θα χειριστεί διδακτικά ο δάσκαλος. Έτσι:

- (Σωστή εικασία) Αν φτιάξω έναν «αρκούντως μεγάλο κύβο» ακόμα και με τον δεύτερο κύβο , φθάνω και ξεπερνάω το ταβάνι.
- (Λανθασμένη εικασία)Αν φτιάξω όμως έναν πολύ μικρό, πάλι φθάνω διότι λόγω των απείρων βημάτων δεν θα έχω κανένα περιορισμό.

Εδώ , έτσι ώστε να είναι αποτελεσματική η σύγκρουση της νέας γνώσης με την λανθασμένη περί απείρων διαδικασιών πρώτης εντύπωσης, πρέπει να δοθεί έμφαση, στις αντιπαραθέσεις και ισχυρισμούς μεταξύ των ομάδων.

Μετά την αντιπαράθεση, καλούνται οι ομάδες να ξεκινήσουν από διαφορετικά αρχικά μήκη ακμής κύβου και να διαπιστώσουν

[32]Ο Χρόνης Κυνηγός (1996«Μαθηματική εκπαίδευση» Σημειώσεις του μαθήματος Παιδαγωγικά)σελ.57 γράφει ότι έννοια του ορίου είναι δύσκολη και χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή στις διαισθητικές αντιλήψεις.

αν το άπειρο άθροισμα ξεπερνά το ύψος της αίθουσας που είναι 6 m.

Κάθε ομάδα αναλαμβάνει κάποια πιθανά μήκη έναρξης της διαδικασίας : 1m , 2m , 3m , 4m , 5m.

Μετά το πέρας των διαδικασιών και την ανακοίνωση των αποτελεσμάτων , τίθεται το ερώτημα:

« Ποιο είναι το πιο μεγάλο μήκος ακμής που με οδηγεί σε αδυναμία πλησιάσματος του ταβανιού; Αν δεν ξέραμε το ύψος του ταβανιού ποιο θα ήταν το πρώτο μήκος ακμής κύβου που με οδηγεί σε αδυναμία πλησιάσματος του ταβανιού; »

Εδώ καλούνται να αναπτύξουν εικασίες σχετικά και με το προηγούμενο αποτέλεσμά τους και να το γενικεύσουν . ουσιαστικά καλούνται να δουν το σχήμα

$\frac{a}{2}+\frac{a}{4}+\frac{a}{8}+.........=a$ και επίσης να συνειδητοποιήσουν ότι μετά τον πρώτο όρο τον α/2, όλο το επ΄έπειρον άθροισμα κάνει κι αυτό α/2 ή να δουν ότι το προηγούμενο σχήμα είναι ουσιαστικά το παρακάτω:

$$\frac{a}{2}+\frac{a}{4}+\frac{a}{8}+.........=a(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+.......)=a1=a$$

το συμπέρασμα που θα προκύψει από τα προηγούμενα , μπορεί να ισχυροποιηθεί με το να κληθούν οι ομάδες να απαντήσουν με το να απαντήσουν στα εξής ερωτήματα:

«Αν υποθέσουμε ότι βάφουμε όλους τους άπειρους κύβους ! Θα χρειασθούμε άπειρη χρωστική ή όχι;»

«Αν όλοι οι κύβοι μου είναι από ομογενές (συμπαγές) μέταλλο που έχει πυκνότητα ρ=5gr/cm^3 . Ποια είναι η μάζα όλων των άπειρων κύβων ;
Είναι γνωστό από την χημεία ότι το τελευταίο όριο όγκου που μπορεί να θεωρηθεί σίδερος είναι το ένα μόριο σιδήρου. Σε αυτό το όριο μπορώ να φθάσω σε πεπερασμένα βήματα. Με την διαδικασία που κάνω, υπολογίζω άπειρες μάζες κύβων μικρότερες κι από το όριο του ενός μορίου.
Ποιο είναι το επίπεδο λάθους που κάνω με αυτή την παραδοχή;»

Αν υπάρξει κατάκτηση της έννοιας από τους μαθητές , αναμένεται να υπάρξει η σωστή απάντηση (μέσα από την διαδικασία κατάκτησής της) που λέει ότι όταν φθάσουμε στο επίπεδο μορίου, από κει και πέρα τα άπειρα βήματα μου προσθέτουν βάρος ενός ακόμα μορίου!…………

Πρέπει να σημειωθεί ότι κατά την ανάδειξη αυτής ης έννοιας , μπορεί σε κάποια στιγμή ένας μαθητής να σηκωθεί και να προχωρά από έναν τοίχο προς τον άλλο με διαδικασία διχοτόμησης του εναπομένοντος διαστήματος ή να επαναλάβει την διαδικασία με πεπερασμένα βήματα όταν το πρώτο βήμα γίνει παραπάνω από το μισό μήκος αιθούσης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

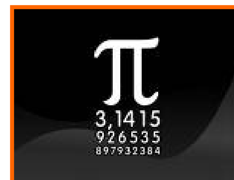
1) Ευγενία Κολέζα « Γνωσιολογική και διδακτική προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών» εκδόσεις Leader Books 2000
2) Αθανάσιος Γαγάτσης «Διδακτική των μαθηματικών , θεωρία έρευνα» εκδόσεις art of text Α.Ε. Θεσσαλονίκη 1995
3) Αθανάσιος Γαγάτσης «Θέματα διδακτικής των μαθηματικών» Θεσσαλονίκη 1993
4) Χρόνης Κυνηγός « Μαθηματική εκπαίδευση –Σημειώσεις στο μάθημα Παιδαγωγικά» αθήνα 1996
5) D . Hilbert: «Για το άπειρο» Εκδόσεις Τροχαλία , αθήνα 1998
6) Θ. Τριλιανός «μεθοδολογία Διδασκαλίας ΙΙ» εκδόσεις Αφοι Τολίδη , Αθήνα 1992
7) «Μια ώρα με τον Piaget- Συζήτηση για την διδασκαλία των μαθηματικών» Απόδοση στα Ελληνικά Ν. Ράπτη , Αθήνα 1977
8) P.J. Davis- R. Hers «Η μαθηματική Εμπειρία» Εκδόσεις Τροχαλία
9) Martin Gerder «Η μαγεία των παραδόξων» Εκδόσεις Τροχαλία
10) Δημήτρης Καραγιώργος « Το πρόβλημα και η επίλυση του – μια διδακτική προσέγγιση» εκδόσεις Σαββάλας
11) Γιώργος Πράσινος « Το άπειρο» εκδόσεις κώδικας 1986

12) Διονύσιος Αναπολιτάνος « Εισαγωγή στην φιλοσοφία των μαθηματικών»

13)Howard Eves «Μεγάλες στιγμές των μαθηματικών-μετά το 1650» εκδόσεις Τροχαλία

14) Jean Pierre Luminet – Marc Lachieze-Rey «Η φυσική και το άπειρο» Εκδόσεις Π. Τραυλός - Ε. Κωσταράκη.-

Το π με 1.000.000 ψηφία & η κατανομή τους



Το τυπώνει το επαγγελματικό λογισμικό **Mathematica** , δηλ. **το μεγαλύτερο υπερεργαλείο μαθηματικών στον κόσμο** που κυκλοφορεί ελευθέρως στο εμπόριο. Δεν έκανε πάνω από μισό λεπτό να το τυπώσει σε έναν απλό οικιακό υπολογιστή με επεξεργαστή Celeron 1.700 Hz



Πριν 10 χρόνια διάβαζα έκπληκτος (αλλά ακόμη και τώρα σε κάτι βιβλία που δεν ανανεώνουν την ύλη τους στις επανεκδόσεις τους) ότι «βρέθηκε ο αριθμός π με 1.000.000 ψηφία μετά από μήνες συνεχούς εργασίας πολλών υπερ-υπολογιστών που δούλευαν παράλληλα νυχθημερόν και με έπιανε δέος . Σήμερα τον τυπώνω , μπορώ να τον βρω (στο mathematica) και με 10 εκατομμύρια ψηφία, μάλλον μπορώ και με 100.000.000 ψηφία, αλλά δεν το επιχειρώ, διότι μπορεί να περιμένω κάποιες ώρες (δεν πιστεύω παραπάνω, ας….πειραματιστεί κάποιος άλλος!) Μάλλον θα μου κολλήσει και ο Η/Υ, οπότε δεν το επιχειρώ. Έχω πάντως αρκετά ψηφία για την δουλειά που τον χρειάζομαι!



Για να καταλάβετε, πριν από πάρα πολλά χρόνια είχα διαβάσει, ότι αν επιχειρήσουμε να βρούμε την περίμετρο του σύμπαντος (μέχρι εκεί που έχει φθάσει το φώς από την εποχή «της μεγάλης εκρήξεως) και χρησιμοποιήσουμε μόνο τα 16 πρώτα ψηφία του π , δεν θα κάνουμε λάθος παραπάνω από 6-7 μέτρα (!)

Τι να τα κάνουμε επομένως τα 1.000.000 ψηφία;

Σήμερα έχουμε βρει –κρατηθείτε- 1,24 τρις εκατομμύρια ψηφία του . **Η μόνη πρακτική χρησιμότητά τους είναι ο έλεγχος των υπολογιστικών παραμέτρων ενός υπολογιστή των λογισμικών και των αλγορίθμων .**

Στην αρχή που χρησιμοποιούσα το Mathematica ,με έπιανε ένα άγχος , κάτι σαν τύψεις και ενοχές ! Θα σας πω το γιατί ….. Αν βάλλεις το λογισμικό να σου βρει **πρώτη φορά** πόσο κάνει 1+1 , είναι αλήθεια ότι φαίνεται να ….«το σκέφτεται αρκετά!» , και μετά από 3-4 δευτερόλεπτα , σου βγάζει….σωστό αποτέλεσμα , δηλ. το 2 . Αν αμέσως μετά το ρωτήσεις πόσο κάνει λ.χ. 125! , δεν θα προλάβεις να πατήσεις Σιφτ +Εντερ και θα πάρεις το αποτέλεσμα σε χιλιοστά του δευτερολέπτου (Αν είναι κάτω από 1/10 sec –χρόνος του λεγόμενου μετεικάσματος- δεν

προλαβαίνεις ούτως ή άλλως να το αντιληφθείς !) Αν το ρωτήσεις πόσο κάνει 1.250.000! θα «δυσκολευθεί» αφού θα χρειασθεί να «σκεφθεί» κάποια ελάχιστα δευτερόλεπτα ! **Πάντως οι τύψεις για το ότι βρίσκεις *«έτσι χωρίς ιδιαίτερα σπουδαίο λόγο»* αποτελέσματα που πριν κάτι χρόνια έπρεπε να δουλεύουν νυχθημερόν με κομπιουτεράκια χιλιάδες άνθρωποι για δεκάδες χρόνια (κι ΑΝ το έβρισκαν και σωστά δηλαδή!) δεν λένε να μου φύγουν ακόμα και τώρα!**

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$$
$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)+\arctan\left(\frac{1}{8}\right)+\arctan\left(\frac{1}{18}\right)+\cdots$$
$$\frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$
$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$
$$\pi = \lim_{k\to\infty} 2^k \tan\left(\frac{\pi}{2^k}\right)$$
$$\pi = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\times\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)}\times\cdots}$$

Ως γνωστόν, το π είναι ένας αριθμός **άρρητος** Αυτό σημαίνει, ότι έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία που δεν είναι όλα από κάποια θέση και πέρα όλα 0 ή όλα 9 ή δεν επαναλαμβάνεται περιοδικά στο διηνεκές κάποιο μέρος των ψηφίων του. Αυτό δεν σημαίνει ότι δεν μπορούν να έχουν και κάποια τάξη τα ψηφία του ή μια κανονικότητα ή να ακολουθούν κάποιο κανόνα παραγωγής . Για παράδειγμα μετά από ένα αριθμό ψηφίων θα μπορούσε να λείπει ο αριθμός 5 . Ο π θα εξακολουθούσε να είναι άρρητος με κάποια «τάξη» (το 5 θα το εμφάνιζε στην ακολουθία των ψηφίων του πεπερασμένες φορές και άπειρες όλα τα άλλα ψηφία) Αν τώρα κάποιος μας πει «αντικαθιστώ όλα τα ψηφία του π που είναι ίσα με 5 με το 9» Τι αριθμός θα προκύψει; Ρητός ή άρρητος;» (Ας το σκεφθεί ο αναγνώστης πριν πάει στην υποσημείωση[1])

Γενάται το ερώτημα:

Τα ψηφία του π εμφανίζονται με κάποια κανονικότητα μέσα στην άπειρη ακολουθία ; Εμφανίζονται τυχαία; Πόσο τυχαία; Ισοκατανέμονται ; Ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή; Υπάρχει τρόπος να το διαγνώσουμε;

Ας προσεγγίσουμε τα παραπάνω ερωτήματα:

Κατά πρώτον τα ερωτήματα έχουν απαντηθεί και δεν περιμένουν την παρούσα εργασία!

$$\pi = 4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots\right)$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots}$$
$$= \sqrt{6\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{8n+1}-\frac{2}{8n+4}-\frac{1}{8n+5}-\frac{1}{8n+6}\right)\left(\frac{1}{16}\right)^n$$

Ναι, τα ψηφία κατανέμονται τυχαία και η ακολουθία των ψηφίων του π μπορεί να χρησιμοποιηθεί , ως γεννήτρια τυχαίων αριθμών . το μόνο πρωτότυπο που θα κάνουμε εδώ είναι να τα απαντήσουμε με την βοήθεια του…..Word (!!!)

Βεβαίως, μελετάμε

---

[1] Δεν γνωρίζουμε. Υπάρχει το ενδεχόμενο, τα ψηφία του π , από μία τάξη ψηφίου και πέρα να είναι όλα 5 ή 9 . Αν τότε αντικαταστήσουμε το 5 με 9, θα μας προκύψει ρητός περιοδικός με περίοδο το 9 . Σε κάθε άλλη περίπτωση θα εξακολουθήσει να είναι άρρητος. Γενικώς όμως, δεν γνωρίζουμε.

τα 1.000.000 πρώτα ψηφία του π . Δεν ξέρουμε (φυσικά!) τα άπειρα. **Εικάζουμε** ότι η στατιστική συμπεριφορά που έχει η ακολουθία για τα πρώτα 1 εκατ. Ψηφία του είναι ίδια και για τα επόμενα 9 εκατομμύρια ψηφία του (όντως είναι!) και ίδια για τα επόμενα 1 τετράκις εκατομμύριο ψηφία (ενημέρωση 2004) Αλλά ότι θα είναι ίδια και για τα επόμενα άπειρα ψηφία του , αυτό μόνο ο…. Θεός το ξέρει!

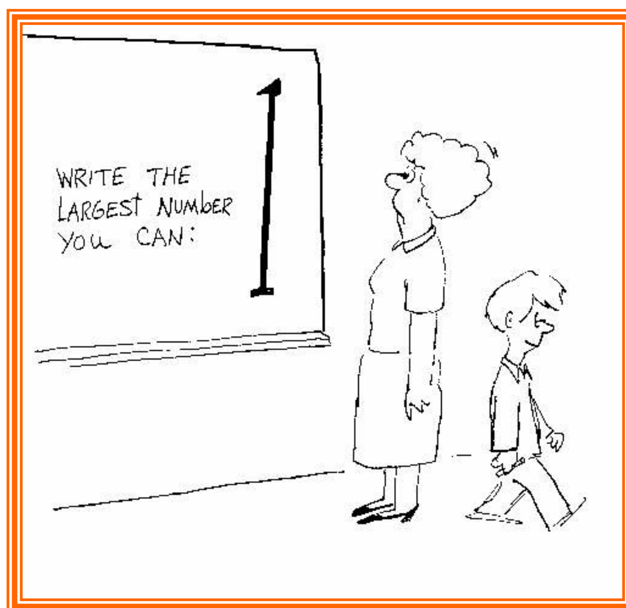
Τα σίγουρα που γνωρίζουμε για το π , είναι ότι είναι αριθμός **άρρητος** (εξηγήσαμε παραπάνω τι σημαίνει αυτό) και επίσης είναι αριθμός **υπερβατικός,** δηλαδή, «**<u>δεν μπορεί να προκύψει ως ρίζα πολυωνυμικής εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές (ισοδυνάμως και ρητούς συντελεστές)»</u>**

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi$$

Πιο πρακτικά το προηγούμενο σημαίνει, ότι το π δεν μπορεί να παρασταθεί ως μια αλγεβρική παράσταση που να έχει ρητούς και ριζικά οιασδήποτε τάξεως (με υπόρριζες ποσότητες ρητούς) και δεν είναι κατασκευάσιμος με κανόνα και διαβήτη . Να αντιπαραθέσουμε στο προηγούμενο, ότι και το $\sqrt{2}$ είναι άρρητος (το έχει αποδείξει ο Ευκλείδης) πλην όμως κατασκευάζεται με κανόνα και διαβήτη (υποτείνουσα ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου με κάθετες πλευρές μονάδες) και δεν είναι υπερβατικός, αφού είναι ρίζα της πολυωνυμικής εξίσωσης π.χ. $\chi^2-2=0$

$$\pi = \frac{\overset{338 \qquad 1016 \qquad 940}{\text{ΜΗΚΟΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ ΚΥΚΛΟΥ}}}{\underset{730}{\text{ΔΙΑΜΕΤΡΟΣ}}} = \frac{2294}{730} = 3{,}14\ldots$$

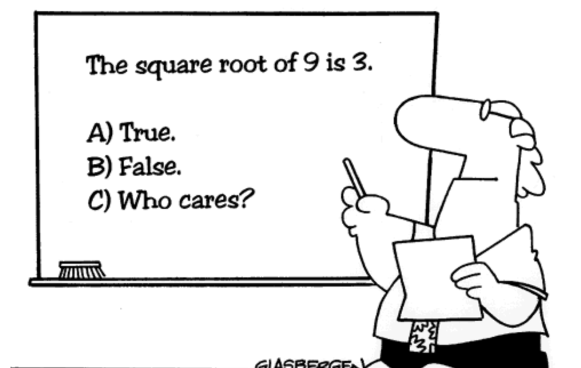
Οι αποδείξεις για την υπερβατικότητα και την αρρητότητα του π υπάρχουν στην παρούσα ιστοσελίδα <u>(ΕΔΩ)</u> και μπορεί κάποιος να διαβάσει τις (μάλλον δύσκολες) αποδείξεις .Ας μην ξεχνάμε, ότι το πρόβλημα που ταλάνιζε την μαθηματική κοινότητα κάτι αιώνες ήταν ο τετραγωνισμός του κύκλου, πράγμα που έγινε γνωστό μόλις το 1882 από τον **Λίντενμαν (Δεν μπορεί να κατασκευαστεί με κανόνα και διαβήτη τετράγωνο εμβαδού ίσου με το εμβαδόν δοθέντος κύκλου , επειδή το π είναι υπερβατικός αριθμός)**



$$\pi = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

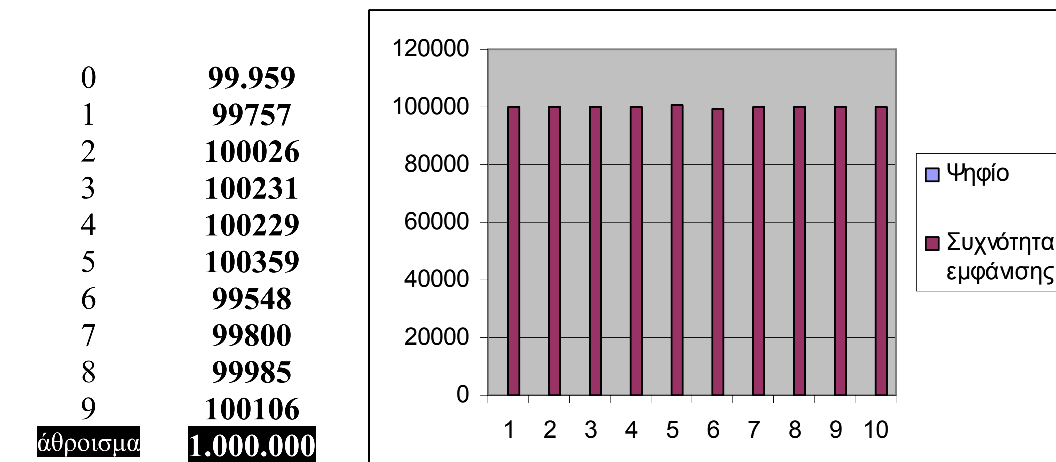
Στην κλασσική ευκλείδεια Γεωμετρία, αν έχεις ένα ν-γωνο, μπορείς εύκολα να κατασκευάσεις ένα (ν-1)-γωνο με το ίδιο εμβαδόν (πολύγωνο με μια πλευρά λιγότερη) με αυτή την λογική, οποιοδήποτε ν-γωνο, τελικά, μετά από πεπερασμένα βήματα, ανάγεται σε τρίγωνο ιδίου εμβαδού. Στην συνέχεια, το τρίγωνο, είναι εύκολο να γίνει

παραλληλόγραμμο ιδίου εμβαδού και το παραλληλόγραμμο να γίνει τετράγωνο ιδίου εμβαδού (εκμεταλλευόμαστε, ότι το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου, ισούται με το γινόμενο των προβολών των καθέτων πλευρών στην υποτείνουσα)



Τελικώς: Κάθε ν-γωνο, ανάγεται σε τετράγωνο ίσου εμβαδού . Λογικό ήταν να αναζητηθεί η αναγωγή και σε κύκλο ιδίου εμβαδού κάτι που βασάνισε επί πολύ πολλούς μαθηματικούς , επηρέασε όσο τίποτα την εξέλιξη των μαθηματικών και υπάρχει μια τεράστια φιλολογία επ΄ αυτού και αντίστοιχη μαθηματική βιβλιογραφία.

Πάντως το «αστείο» (ή και τραγικό ανάλογα με την οπτική) της όλης υπόθεσης , είναι, ότι ενώ έχει αποδειχθεί πέραν πάσης αμφιβολίας από το 1882 , ότι δεν κατασκευάζεται κύκλος ιδίου εμβαδού με δοθέν τετράγωνο με κανόνα και διαβήτη , εκατοντάδες «τρελοί επιστήμονες» αυτή την στιγμή , ισχυρίζονται ότι το ….πέτυχαν! Βεβαίως (αν αναφερθούμε στις πιο «σοβαρές» περιπτώσεις) αυτό μπορεί να επιτευχθεί πολλαπλώς, αλλά με την βοήθεια **άλλου οργάνου , πάντως όχι κανόνα και διαβήτη**. Αυτό μπορεί να μην είναι εμφανές σε κάποιον που δεν είναι επαρκώς υποψιασμένος διότι αν ακούσει λ.χ. την έκφραση «έστω η παραβολή $y=x^2$, δεν σκέπτεται αυτομάτως ότι αυτή δεν κατασκευάζεται με κανόνα και διαβήτη![2] Αυτό μπορεί να είναι μια αφετηρία λάθους. Και βεβαίως, όταν ξεκινάς από λάθος υπόθεση, με λογικά βήματα καταλήγεις σε λάθος συμπέρασμα. Αν λοιπόν κάποιος παρακολουθήσει τα αποδεικτικά βήματα μιας τέτοιας «απόδειξης» δεν θα βρει λάθος στα βήματα , αλλά αυτό συνήθως υπάρχει στις παραδοχές , **οι οποίες παραδοχές υποκρύπτουν τον κανόνα και τον διαβήτη** Υπενθυμίζω, ότι έχει αποδειχθεί κάτι **ισχυρότερο:** «Οποιαδήποτε γεωμετρική κατασκευή πραγματοποιείται με κανόνα και διαβήτη, μπορεί να κατασκευασθεί **μόνο με διαβήτη**» (*θεώρημα του **Mohr-Mascheroni***)



0	**99.959**
1	**99757**
2	**100026**
3	**100231**
4	**100229**
5	**100359**
6	**99548**
7	**99800**
8	**99985**
9	**100106**
άθροισμα	**1.000.000**

[2] Προσοχή! Άλλο να κατασκευάσεις πεπερασμένα σημεία μιας παραβολής και άλλο την ίδια την παραβολή που έχει το σύνολο των σημείων που πληρούν τον γνωστό ορισμό.

Το παραπάνω ιστόγραμμα είτε ο πίνακας, εκφράζουν ότι η συχνότητα εμφάνισης των πρώτων 1.000.000 ψηφίων του π , είναι **σχεδόν ίδια** για όλα τα ψηφία .

Αν κάνουμε και μια δοκιμή για το αν λ.χ. το ψηφίο 5 είναι «ισοπίθανο» για εμφάνιση σε κάθε θέση μπορούμε να βρούμε την εμφάνιση των αριθμών 5, 55, 555, 5555,55555,555555,5555555 . Αν είχαμε ισοπιθανότητα εμφάνισης τότε για μεν το 5 αναμένουμε συχνότητα εμφάνισης 100.000 (στην πραγματικότητα 100.359) για το 55 συχνότητα 10.000 , για το 555 συχνότητα 1000 , για το 5555 συχν. 100 κ.ο.κ.

Πράγματι, έτσι συμβαίνει, διότι αν μετρήσουμε τις εμφανίσεις των παραπάνω στοιχείων μέσω της εντολής του Word **«εύρεση του 55»** και **«αντικατάστασή του με 55»** τότε θα μας δώσει και την συχνότητά εμφάνισής του.

αριθμός	Συχνότητα	αριθμός	Συχνότητα
5	100.359	1	**99757**
55	9.175	12	**9612**
555	915	123	**950**
5555	86	1234	**73**
55555	13	12345	**8**
555555	3	123456	**0**

αριθμός	Συχνότητα
6	**99548**
35	**10061**
489	**991**
2647	**92**
09631	**9**
562379	**0**

Ελέγχουμε για λίγους τυχαίους και εικάζουμε για όλους

Όλοι οι τετραψήφιοι ακέραιοι αντιστοιχίζονται σε συχνότητες περί το 100

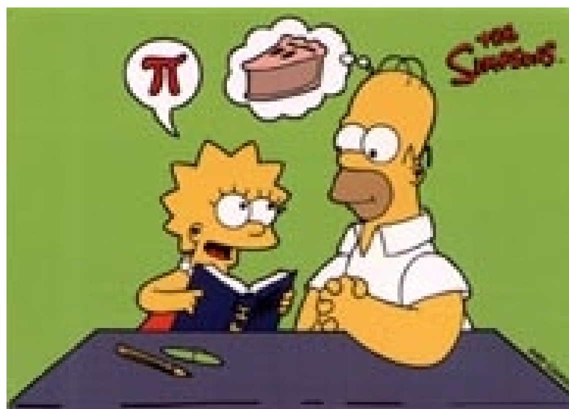
1970 →104 , 2006→91 , 1821→102 , 1453→123 , 1940→89 , 1974→115 Δηλαδή, η χρονολογία γεννήσεώς σας εμφανίζεται γύρω στις 100 φορές.

Όλα οι πενταψήφιοι σε συχνότητες περί το 10:

50.000→16 , 45678→6 , 12345→8 , 78945→15 , 14258→9

Όλοι οι εξαψήφιοι σε συχνότητες περί το 1

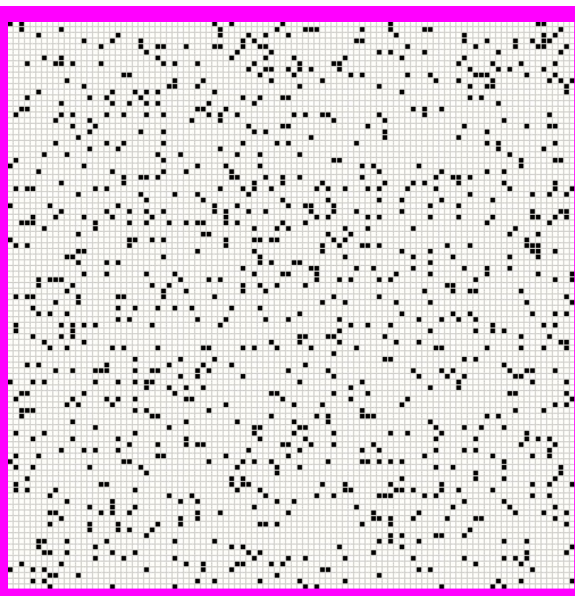
281040→0 , 110901→0 , 250321→0 130974 →1 010101→2 Αν είστε τυχερός, μπορεί να βρείτε μία φορά και την χρονολογία γεννήσεώς σας, όπως απαιτεί να την γράφετε ο τύπους της «Υπεύθυνης



Είναι γνωστή- η μάλλον γελοία- εμμονή των Αγγλόφωνων στην προφορά του «π» ως «πάϊ» (πίτα) και όχι ως «πι»

Δήλωσης του Ν.1599» δηλ. ως εξαψήφιο αριθμό όπου λ.χ. η ημερομηνία 2 Οκτωβρίου 1983 γράφεται ως 021083 .

Όλα τα παραπάνω, μας πείθουν, ότι τα ψηφία του π είναι όντως ισοπίθανα και κατανέμονται τυχαία. Λέγοντας «μας πείθουν» εννοούμε ως εύπιστα όντα, διότι **αυτό που ισχύει για το πεπερασμένο, δεν ισχύει απαραιτήτως για το άπειρο**. Μπορεί, ο αριθμός π , μετά από το 1 δεκάκις εκατομμυριοστό του ψηφίο να εμφανίζει όλα τα υπόλοιπα στοιχεία πλην λ.χ του 5 . Μπορεί να εμφανίζει περίεργη συμπεριφορά στην κατανομή των ψηφίων του. Αυτό κανείς δεν μπορεί να μας το βεβαιώσει ή να μας το διαψεύσει (Μέχρι στιγμής τουλάχιστον, εκτός αν ανακαλύψουμε συνταρακτικές μαθηματικές προτάσεις για την φύση των αρρήτων μεγεθών)



Η παραπάνω εικόνα δείχνει την κατανομή του ψηφίου 1 στα 10.000 πρώτα ψηφία. Σας φαίνεται τυχαία;

Πάντως, είτε το π εμφανίζει ισοπίθανη τυχαιότητα κατανομής στα ψηφία του (όπως απλώς εικάζουμε) είτε όχι , τότε η πιθανότητα να πετύχουμε έναν οσοδήποτε μεγάλο αριθμό ανάμεσα στα δεκαδικά ψηφία του, είναι 1 (100% δηλαδή, βέβαιο γεγονός) αφού οι «δοκιμές» είναι άπειρες και οι πιθανότητα εμφάνισης κάθε ψηφίου θετική.

Αν ο ….Θεός , αποκαλύψει ότι υπάρχει ένας πολύ μεγάλος συγκεκριμένος αριθμός στην ακολουθία των ψηφίων του π, (βέβαιο ενδεχόμενο) δεν είναι και πρακτικά εφικτό να τον βρεις, αφού αυτός για πρώτη φορά μπορεί να εμφανίζεται από ένα σημείο και πέρα που δεν το έχει βρει ακόμα ο άνθρωπος και αυτό το σημείο μπορεί να είναι οσοδήποτε μεγάλο. Οι πιθανότητες με τα απειροσύνολα μπορούν να εμφανίζουν παράδοξα . Για παράδειγμα, αν τμήσω το ευθύγραμμο τμήμα –διάστημα [0,1] τυχαία με μια ευθεία, η πιθανότητα να πετύχω ρητό αριθμό είναι ….μηδέν (αδύνατον!) ενώ οι υπάρχοντες ρητοί στο διάστημα [0,1] είναι άπειροι! Επαναλαμβάνω, ότι αυτό μοιάζει απίστευτο , αλλά αν ορίσουμε **φυσιολογικά –γεωμετρικά,** ως πιθανότητα να εμφανιστεί ρητός :

$$P(\rho\eta\tau\acute{o}\varsigma\,\sigma\tau o[0,1])=\frac{\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho o(\mathbb{Q}\cap[0,1])}{\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho o([0,1]-\mathbb{Q})}=\frac{0}{1}=0$$

Κάποιος μπορεί να εγείρει αντιρρήσεις φιλοσοφικού τύπου στο προηγούμενο, αλλά η αλήθεια είναι, ότι **«σχεδόν όλοι οι αριθμοί είναι άρρητοι»** Η εξωμαθηματική έκφραση **«σχεδόν όλοι»** φαίνεται αντιφατική με την πιθανότητα μηδέν. Για να κάνουμε κατανοητό το προηγούμενο, πρέπει να φέρουμε στο μυαλό μας ορισμένες αλήθειες που το πεπερασμένο ανθρώπινο μυαλό δεν μπορεί να παραδεχθεί απ΄ την ίδια την φύση του και να δώσουμε επί πλέον επιχειρήματα:
Αν φανταστούμε ένα σακούλι με όλους τους φυσικούς αριθμούς (άπειρους) τότε η εκ των προτέρων πιθανότητα με μία εξαγωγή να πετύχω τον αριθμό 5 είναι $\frac{1}{\infty}=0$.

Αλλά και

$$100000^{100000^{100000^{100000^{100000^{100000^{100000^{100000^{100000^{100000}}}}}}}}}$$

εξαγωγές να κάνω πάλι η πιθανότητα είναι μηδέν. Τον προηγούμενο φυσικό, παρ΄ ότι έχω χρησιμοποιήσει μικρό χώρο για να τον παραστήσω, δεν υπάρχει άνθρωπος που να μπορεί να φανταστεί ούτε καν την τάξη του, ούτε κάν το πόσο πολλαπλάσιο είναι του αριθμού των στοιχειωδών σωματιδίων που υπάρχουν στο Σύμπαν[3]. Αυτό ας θεωρηθεί βέβαιον χωρίς….απόδειξη! Απλώς, πρέπει να γίνει κατανοητό, ότι όπως από το πεπερασμένο **μεταπηδούμε σε ποιότητα** αναφερόμενοι στο άπειρο, έτσι και από το άπειρο αριθμήσιμο των ρητών ($\aleph_0$:=Άλεφ μηδέν) όταν μεταπηδούμε στο άπειρο υπεραριθμήσιμο των αρρήτων που υπάρχουν στο [0,1] , $\aleph_1$ (Άλεφ ένα) αλλάζουμε ανάλογη ποιότητα. Όμως , η πιθανότητα μηδέν , δεν οφείλεται στην μεταπήδηση τάξεως του απείρου, αλλά στα διαφορετικά μέτρα , δεδομένου, ότι και το σύνολο Cantor[4] έχει υπεραριθμησιμοτητα μεν, αλλά μέτρο μηδέν.

---

[3] Όταν από κεκτημένη ταχύτητα φτιάχνουμε εικόνες για να κατανοήσουμε το άπειρο, πέφτουμε σε λάθη εκ των προτέρων. Για παράδειγμα, όταν φανταζόμαστε μια κληρωτίδα με ένα σακούλι που έχει άπειρους αριθμούς μέσα, πρέπει να αντιληφθούμε, ότι δεν υπάρχει υλικό τέτοιο σακούλι, αφού, οσοδήποτε μικρές διαστάσεις και να έχει κάθε αριθμός, ακόμα και ψηφιακή μορφή, πρέπει ο δίσκος να είναι άπειρης χωρητικότητας, δηλαδή άπειρου υλικού όγκου. Η μαθηματική αφαίρεση και τα μαθηματικά αντικείμενα, δεν έχουν ταύτιση με τα φυσικά αντικείμενα , παρ ότι μέσω των πρώτων συνήθως προσεγγίζουμε τα δεύτερα με όση ακρίβεια θέλουμε.

[4] Το σύνολο του Cantor πρέπει να το φανταστεί κάποιος ως εξής: Χωρίζω το [0,1] σε τρία ίσα κομμάτια πετάω το μεσαίο και κρατάω τα άλλα δύο. Κάθε ένα από τα δύο το χωρίζω σε τρία ίσα κομμάτια, πετάω το μεσαίο και κρατάω τα δύο άλλα. Αυτή την διαδικασία την συνεχίζω επ΄ άπειρον και το σύνολο που προκύπτει λέγεται σύνολο του Cantor. Αυτό είναι ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο, αλλά έχει μέτρο κατά Λεμπέγκ μηδέν.

Των παραπάνω δοθέντων, συνάγομε , **ότι δεν ξέρουμε «σχεδόν τίποτα» για τα ψηφία του π , αφού είναι άπειρα**. Μάλιστα αν θέσουμε στο μαθηματικό μικροσκόπιο την έκφραση «σχεδόν τίποτα» θα δούμε ότι το σωστό είναι ότι **«δεν ξέρουμε τίποτα»,** αφού τα ψηφία του π είναι άπειρα στο πλήθος, μη περιοδικά και όταν εμείς γνωρίζουμε ένα τεράστιο πεπερασμένο κομμάτι των ψηφίων του, ως κλάσμα επί του συνόλου , απλώς δεν γνωρίζουμε ….τίποτα!

Προτεινόμενοι σύνδεσμοι στο διαδίκτυο:

1. **http://thestarman.dan123.com/math/pi/RandPI.html**
2. **http://www.answers.com/topic/pi**
3. **http://thestarman.dan123.com/math/pi/index.html**
4. **http://www.geocities.com/thanostasios/pi.html**

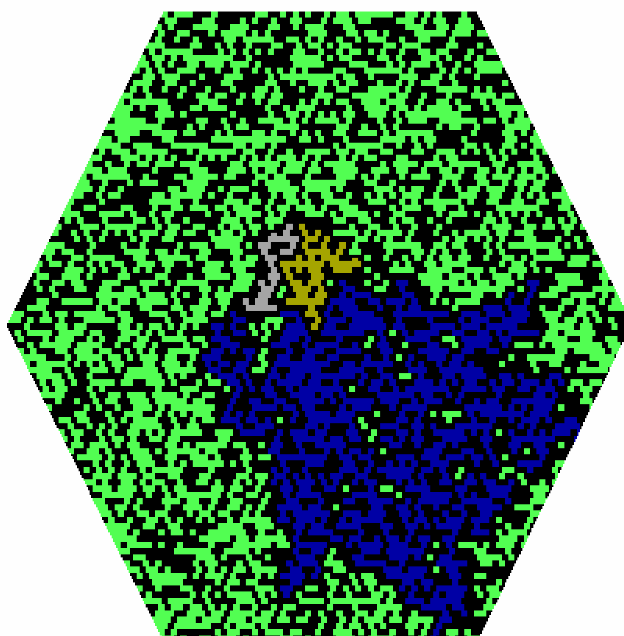
http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%91%CF%81%CE%B9%CE%B8%CE%BC%CF%8C%CF%82_%CF%80

5. **http://www.mathpages.com/home/kmath519.htm (για το e και για το π , αν είναι «κανονικοί»)**
6. **(Και μια «λύση» του τετραγωνισμού του κύκλου με κανόνα και διαβήτη) http://www.alkyone.com/mak-pi-gr/gr/gr_release.htm**

Ψηφίο	Συχνότητα εμφάνισης των δεκαδικών ψηφίων στα πρώτα 4,2 δισεκατομμύρια ψηφία του π .
6	**420.033.987**
9	**420.011.183**
4	**420.007.057**
1	**420.006.394**
0	**420.003.528**
8	**420.001.484**
7	**419.996.867**

5	**419.989.094**
3	**419.978.657**
2	**419.971.749**

Το παρακάτω περίεργο εξαγωνικό σχήμα έχει κατασκευαστεί με βάση την δυαδική ανάπτυξη των ψηφίων του π πάνω σε ένα καμβά που έχει την ίδια δομή με το κτίσιμο μονότουβλων και έχουν διαταχθεί σπειροειδώς (50 φορές) το σχήμα το ονομάζουν «Η κυρία π» και ο κατασκευαστής του ισχυρίζεται, ότι βλέπει μια γυναικεία μορφή . Προσωπικώς αδυνατούμε να την δούμε, αλλά αν την δείτε , παρακαλώ να μας το διαμηνύσετε!



Συχνότητα εμφάνισης ψηφίων στα πρώτα 10.000.000 ψηφία του π.
(Η ομοιόμορφη κατανομή είναι προφανής)

0	**999440**
1	**999333**
2	**1000306**
3	**999965**
4	**1001093**
5	**1000466**
6	**999337**
7	**1000206**
8	**999814**
9	**1000040**

Τρισεκατομμύρια ψηφία του π

(Να σημειώσω, ότι το παρακάτω κείμενο, έχει μεταφραστεί μηχανικά επί γραμμής από τον δικτυότοπο της AltaVista από το δωρεάν προσθήκη λογισμικού lingo που αποτελεί πρόσθετο στον σελιδομετρητή FireFox 2.0 .Το παραθέτω επίτηδες για να διαπιστώσετε ιδίοις όμμασιν την ποιότητα της μετάφρασης. Έχουν διορθωθεί 6-7 λέξεις μόνο, κάποιοι σολοικισμοί)

Ο επιστήμονας υπολογιστών Yasumasa Kanada και οι συνάδελφοί του στο πανεπιστήμιο του κέντρου τεχνολογίας πληροφοριών του Τόκιο πέτυχαν το 2002 στον υπολογισμό 1.241.100.000.000 δεκαδικών ψηφίων του π, συνθλίβοντας το προηγούμενο παγκόσμιο αρχείο 206.158.430.000 ψηφίων τους, που επετεύχθη το 1999. Ο υπολογισμός απαίτησε περίπου 602 ώρες σε έναν υπολογιστή Hitachi SR8000, με την πρόσβαση σε μια μνήμη περίπου 1 terabyte. (1 τέρα=1000γίγα)

Για να υπολογίσουν τα ψηφία του π, ο Kanada και η ομάδα του, χρησιμοποίησαν τους τύπους που περιλαμβάνουν τις arctangent σχέσεις του π (τόξο εφαπτομένης) . Παραδείγματος χάριν, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ακόλουθη έκφραση για να επιλύσετε την αξία του arctangent *του X* σε οποιοδήποτε επιθυμητό αριθμό δεκαδικών θέσεων ακριβώς με τον υπολογισμό της σειράς σε έναν αρκετά μεγάλο αριθμό όρων:

$$\text{Arctangent}(x) = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + x^9/9 - \ldots$$

Η τιμή του π μπορεί έπειτα να ληφθεί από την ακόλουθη εξίσωση:

π = 16 arctangent (1/5). 4 arctangent (1/239).

Με τη χρησιμοποίηση δύο διαφορετικών τύπων, οι ερευνητές ήταν σε θέση να συγκρίνουν τα αποτελέσματα και να πιστοποιήσουν την ακρίβεια του υπολογισμού.

Οι βελτιώσεις στον αλγόριθμο υπολογιστών που χρησιμοποιήθηκε για τον κύριο υπολογισμό συνέβαλαν επίσης στον άθλο. Ο Kanada υπολογίζει ότι εάν η νέα έκδοση του αλγορίθμου είχε εφαρμοστεί το 1999 για να υπολογίσει 206 δισεκατομμύριο ψηφία του π, ο συνολικός χρόνος υπολογισμού στον ίδιο υπολογιστή θα είχε διαρκέσει από 83 έως 38 ώρες.

Το 1,241,100,000,000th δεκαδικό ψηφίο του pi (που δεν μετρά το αρχικό ψηφίο, 3) είναι 5. Kanada έχει αρχίσει να αναλύει τη στατιστική διανομή των ψηφίων του pi και τα απεσταλμένα προκαταρκτικά αποτελέσματα ευρίσκονται σε http://www.super-computing.org/pi-decimal_current.html. Η προσδοκία είναι ότι κάθε ένα από τα ψηφία από 0 έως 9 πρέπει να εμφανιστεί για το ένα δέκατο του χρόνου. Με άλλα λόγια, θα αναμένατε το ψηφίο 7 για να εμφανιστείτε 80 δισεκατομμύριο φορές μεταξύ των πρώτων 800 δισεκατομμύριο ψηφίων του pi. Εμφανίζεται πραγματικά 79.999.775.965 times.close η αναμενόμενη αξία.

Εδώ είναι τα πλήρη αποτελέσματα του Kanada για τα πρώτα 800 δισεκατομμύριο ψηφία:

Ψηφίο	Συχνότητα

1	79.999.983.991
2	80.000.456.638
3	79.999.778.661
4	80.000.238.690
5	79.999.773.551
6	79.999.935.320
7	79.999.775.965
8	80.000.650.170
9	79.999.802.555

Δεν είναι ακόμα αρκετά να τεθούν ερωτήσεις για την κατανομή και το προφανές τυχαίο των ψηφίων του π.

Κανείς δεν μπορεί να μας διαβεβαιώσει, ότι τα ψηφία έχουν άπειρη συχνότητα εμφάνισης και όχι πεπερασμένη.

Κανένας δεν μπορεί ακόμα να αποκλείσει τη δυνατότητα ότι από κάποιο σημείο πέρα από τη σειρά των τρεχόντων υπολογισμών της αξίας του π, τα δεκαδικά ψηφία του επανέρχονται σε μια σειρά που περιορίζεται, για παράδειγμα, μόνο στα ψηφία 1 και 0.

Απομνημόνευση των ψηφίων του π

Ιάπωνας Έσπασε το Παγκόσμιο Ρεκόρ Αποστήθισης Ψηφίων του Αριθμού "π"

πληροφορίες: Ελευθεροτυπία

δημοσίευση: 4 Ιουλίου, 2005

Ένας Ιάπωνας, ο Ακίρα Χαραγκούτσι, 59, από τη Τσίμπα (Chiba), έσπασε το παγκόσμιο ρεκόρ λέγοντας απ' έξω τα περισσότερα από τα άπειρα δεκαδικά ψηφία του αριθμού **π**…([5]) Συγκεκριμένα ο Χαραγκούτσι είπε από μνήμης, και χωρίς να σταματήσει καθόλου, τα πρώτα 83.431 ψηφία μετά την υποδιαίρεση του αριθμού **π**……. Ο Ακίρα Χαραγκούτσι ξεκίνησε την απαγγελία αργά το βράδυ της Παρασκευής (1 Ιουλίου 2005) και τέλειωσε στα 83.431 δεκαδικά ψηφία νωρίς το πρωί του Σαββάτου.

Το μέχρι τώρα Ρεκόρ Γκίνες κατείχε ένας άλλος Ιάπωνας, ο οποίος είχε απαριθμήσει 42.195 ψηφία όταν ήταν φοιτητής στο κολλέγιο.

Διάφοροι τύποι για το π

[5] **Σημείωση δική μας: Πόσα άραγε είναι τα περισσότερα ψηφία από τα ….άπειρα;**

- **Gregory Series** $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{5}$

- $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{4\,n-1} + \frac{(-1)^{n+1}}{4\,n-3}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

- $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2\,n\,(2\,n+1)\,(2\,n+2)} == \frac{3-\pi}{4}$$

- $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

- $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2\,n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

- $$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2\,(-1)^{k}\,3^{\frac{1}{2}-k}}{2\,k+1} = \pi$$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \cot^{-1} F_{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

- $\sum_{k=0}^{\infty} (4k+1)(-1)^k \left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right)^3 = \frac{2}{\pi}$

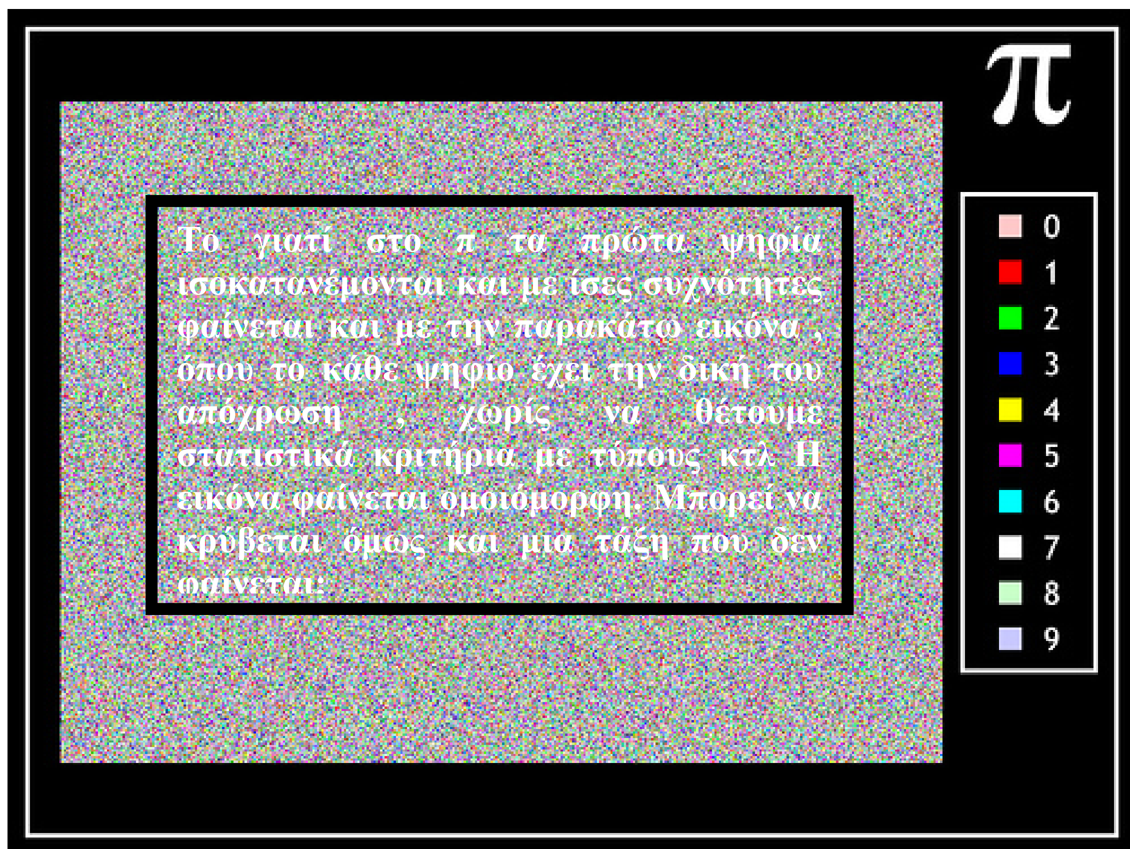
- $\frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!\,(26390\,n+1103)}{(n!)^4\, 396^{4n}} = \frac{1}{\pi}$

- $\sqrt{8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!\,(26390\,n+1103)\,(2n-1)!!\,(4n-1)!!}{99^{4n+2}\, 32^n\, (n!)^3} = \pi$

- $$\frac{1}{740025}\left(-20379280 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{7n}{2n} 2^{n-1}} \left(3\left(-885673181\, n^5 + 3125347237\, n^4 - 2942969225\, n^3 + 1031962795\, n^2 - 196882274\, n + 10996648\right)\right)\right) = \pi$$

- $12 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,(6k)!\,(545140134\,k + 13591409)}{(3k)!\,(k!)^3\, 640320^{3k+3/2}} = \frac{1}{\pi}$

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16} \left(\frac{\binom{2n}{n}}{16^n}\right)^3 (42\,n+5) = \frac{1}{\pi}$



π
Το γιατί στο π τα πρώτα ψηφία ισοκατανέμονται και με ίσες συχνότητες φαίνεται και με την παρακάτω εικόνα , όπου το κάθε ψηφίο έχει την δική του απόχρωση , χωρίς να θέτουμε στατιστικά κριτήρια με τύπους κτλ Η εικόνα φαίνεται ομοιόμορφη. Μπορεί να κρύβεται όμως και μια τάξη που δεν φαίνεται:
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

Η Κορδέλα του Μόμπιους

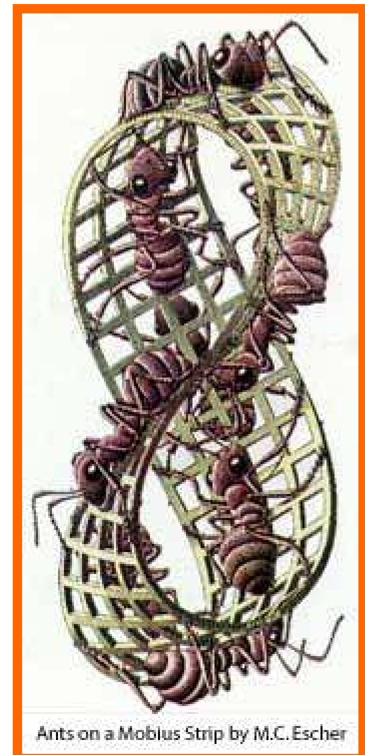
Η λωρίδα ή κορδέλα Mobius είναι ένα ιδιότυπο μαθηματικό αντικείμενο με καταπληκτικές και θαυμαστές ιδιότητες και ονομάστηκε από τον αστρονόμο και το μαθηματικό Αύγουστο Φερδινάνδο Μόμπιους (August Ferdinand Möbius 1790-1868) που ανεκάλυψε «την λωρίδα του» τον Σεπτεμβρίο του 1858. Ανεξάρτητα, ο γερμανικός μαθηματικός Γιόχαν Βενέδικτος Λίστινγκ (Johann Benedict Listing 1808-1882) επινόησε το ίδιο αντικείμενο τον Ιουλίο του 1858. Ίσως πρέπει να ονομάζετο «λωρίδα του Λίστινγκ αντί λουρίδα Μόμπιους .



Το τι είναι, φαίνεται στην παρακάτω εικόνα . Βλέπουμε μια λωρίδα που έχουν ενωθεί οι άκρες της, αλλά πριν ενωθεί έχουμε στρίψει το ένα άκρο κατά 180^0 . Αυτό το μαθηματικό αντικείμενο είναι που έχει τις παράξενες και λίαν ενδιαφέρουσες τοπολογικές ιδιότητες που θα περιγράψουμε παρακάτω:

1. Αυτό το αντικείμενο έχει μία μόνο πλευρά. Αν πάρω το δάκτυλό μου και επιχειρήσω να την περιδιαβάσω, θα επανέλθω στο σημείο από το οποίο άρχισα. Αν βάλουμε ένα μερμήγκι να περπατά πάνω της ,αυτό θα περιπλανείται στο διηνεκές επανερχόμενο στο ίδιο σημείο. Αν προσπαθήσω να το βάψω θα δω ότι λόγω του ότι έχει μία μόνο πλευρά μπορώ να χρησιμοποιήσω ένα το πολύ χρώμα **. Έχει μία μόνο άκρη (πέρας της επιφάνειας)** Αν αν ξεκινήσω από ένα σημείο του πέρατος της επιφάνειας, και ακολουθήσω το πέρας θα επανέλθω στο ίδιο σημείο.

Εν ολίγοις, έχω ένα μαθηματικό αντικείμενο με μία μόνο πλευρά , την στιγμή που κάθε επίπεδο κλασσικό γεωμετρικό σχήμα (κυρτό ή μη κυρτό) έχει δύο πλευρές!



Ants on a Mobius Strip by M.C.Escher

2. Αν το κόψω την κορδέλα κατά μήκος, ενώ κάθε άνθρωπος αναμένει να πάρει δύο ίδιες κορδέλες Μόμπιους, θα πάρει μία ….μεγαλύτερη!

3. Αν συνεχιστεί το κόψιμο της προηγουμένης πάλι κατά μήκος, έχοντας δει το προηγούμενο αποτέλεσμα αναμένουμε να πάρουμε μια ακόμα πιο μεγάλη, όμως παίρνουμε δύο λωρίδες την μία μέσα στην άλλη όπως οι κρίκοι αλυσίδας!

Αυτό το μαθηματικό αντικείμενο προκαλεί τον θαυμασμό με τις τοπολογικές ιδιότητες που έχει , αξίζει απολύτως να το κατασκευάσει κάποιος Προσφέρεται για παρουσίαση –κατασκευή μέσα στην τάξη οποιασδήποτε βαθμίδας όταν λ.χ. λείπει ένας συνάδελφος και τον αναπληρώνει άλλος ή πρέπει να βρει κάτι οπωσδήποτε καλό
και ενδιαφέρον καλό για να τους απασχολήσει! Τα υλικά είναι ψαλίδι και κόλλα ή ζελοτέϊπ ή αυτοκόλλητη ταινία (απ΄ αυτές που περισσεύουν από τις Πανελλήνιες)



Αριστερά μια συμβατική κλειστή κορδέλα που όταν κοπεί δίνει δύο κορδέλες και δεξιά μια κορδέλα Μόμπιους που κόπηκε και έδωσε μια άλλη κορδέλα .



Η γραμμή κατά μήκος της οποίας θα κοπεί η κορδέλα του Μόμπιους

http://www.sciencenews.org/articles/20000708/mathtrek.asp

http://www.sciencenews.org/articles/20000902/mathtrek.asp

http://mathworld.wolfram.com/MoebiusStrip.html

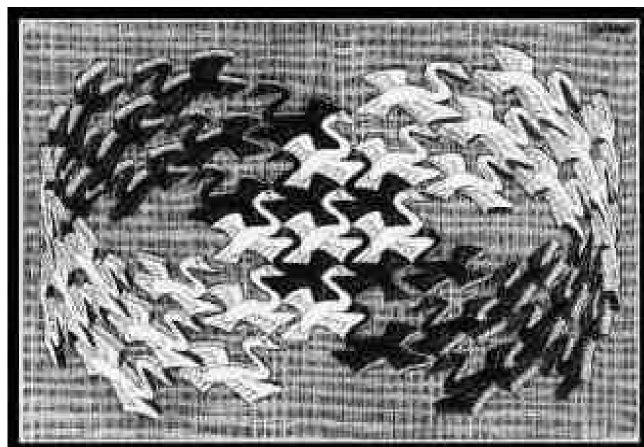
http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/moebius.shtml

http://sprott.physics.wisc.edu/Pickover/mobius-book.html

http://www.jcu.edu/math/vignettes/Mobius.htm

http://en.wikipedia.org/wiki/M%C3%B6bius_strip

Μια παράσταση του Έσερ που όμως δεν παριστάνει κορδέλα Μόμπιους



Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο

Αθηνών

Σχολή Θετικών Επιστημών

Μαθηματικό Τμήμα

Τομέας Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών

Μάθημα : Εισαγωγή στην Ψυχολογία & την Ψυχολογία των Μαθηματικών.

Διδάσκουσα κ. Στέλλα Βοσνιάδου.



Εργασία: «Η μαθηματική δεξιότητα»

μεταπτυχιακός φοιτητής

Ιωάννης Π. Πλατάρος Α.Μ. 211.502



ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΙΝΑΙ ΣΑΝ ΤΟ ΞΥΣΤΟ !.....

Ό,ΤΙ ΚΙ ΑΝ ΞΥΣΕΙΣ , ΤΑ ΑΝΑΚΑΛΥΠΤΕΙΣ ΑΠΟ ΚΑΤΩ!

Ι.ΑΡΑΧΩΒΙΤΗΣ

ΚΑΘ. ΠΑΝ. ΑΘΗΝΩΝ

5 Μαρτίου 2003

0. Πίνακας Περιεχομένων

1.Εισαγωγή



Η **δεξιότητα** στα μαθηματικά , όταν υπάρχει , είναι ευκταία και δεν μπορεί να αποτελεί κρίσιμο θέμα επιστημονικής έρευνας , αλλά απλώς ακαδημαϊκής τοιαύτης. Το μείζονος ενδιαφέροντος θέμα είναι η μαθηματική **α-δεξιότητα** η οποία αποτελεί ενδημικό φαινόμενο και είναι πάντα ζητούμενη η άρση της από τα πρόσωπα-φορείς της.

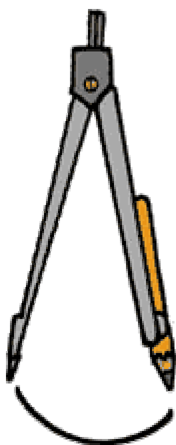
Η δεξιότητα ή η μη δεξιότητα στα μαθηματικά, είναι ταυτόσημες σχεδόν με την ικανότητα επίλυσης ή μη προβλημάτων και ειδικότερα μαθηματικών τοιούτων. Η παρούσα εργασία θα αναφερθεί στους παράγοντες που δημιουργούν ή επιτείνουν το φαινόμενο αυτό, θα διερευνήσει **διόδους άρσης του**, ενώ θα κατατεθούν και προσωπικές μαρτυρίες του γράφοντος από την σχεδόν εικοσαετή εμπειρία του στην τάξη , στην λεγόμενη και «μάχιμη» τάξη των συναδέλφων του πίνακα

Ειδικότερα θα αναφερθούμε στο πασίγνωστο φαινόμενο της **μαθηματικοφοβίας,** στις δυσκολίες που

παρουσιάζονται κατά την επίλυση ενός προβλήματος , στα **στερεότυπα** γύρω από τα μαθηματικά και τους μαθηματικούς, στις εκτεταμένες παρανοήσεις των μαθηματικών , στους **παρακανόνες** που δημιουργούν οι μαθητές, στις **προκαταλήψεις** για τα μαθηματικά και τους μαθηματικούς και θα κάνουμε και κάποιες προτάσεις για να βελτιωθούν κάποια πράγματα στην εκπαίδευση της Πατρίδας μας .

2.Το Ιστορικό πλαίσιο των συζητήσεων για την διδακτική των μαθηματικών

2.1 «ΤΑ ΜΟΝΤΕΡΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ»



Η μεγάλη συζήτηση για τα μαθηματικά και την προβληματική της κατανόησής τους, άρχισε με τις διαταραχές που προεκλίθησαν στην μαθηματική εκπαίδευση με την εισαγωγή των λεγομένων **«Μοντέρνων μαθηματικών»** στις αρχές της δεκαετίας του ΄50 στις ΗΠΑ και στις

αρχές του ΄60 στην Πατρίδα μας. Επρόκειτο για μία λίαν εκτεταμένη εκπαιδευτική μεταρρύθμιση όπου μάλλον παρωχημένα μαθηματικά (διτετράγωνες και αντίστροφες εξισώσεις, λογαριθμικές, εκθετικές, τριγωνομετρικές εξισώσεις, δύσκολοι γεωμετρικοί τόποι κ.ά.) έδωσαν την θέση τους σε λίαν χρήσιμους μαθηματικούς τομείς του σύγχρονου γίγνεσθαι όπως είναι τα στοιχεία Πιθανοτήτων και Στατιστικής. Φιλοσοφικός πυρήνας της μεταρρύθμισης και όχημα καθιέρωσής της ήσαν οι απόψεις του Brouner , ότι **«όλα τα θέματα είναι δυνατόν να διδαχθούν με κατάλληλο τρόπο σε όλους τους μαθητές και σε όλα τα στάδια των σπουδών τους»** Επίσης ο Brouner είπε ότι η διδασκαλία πρέπει να στοχεύει στην κατανόηση και όχι στην απομνημόνευση κάποιων κανόνων.

Οι αλλαγές αυτές μας ξεσήκωσαν θύελλα αντιδράσεων από διδάσκοντες και διδασκομένους. Εντός λίγων ετών εφαρμογής φάνηκε ότι κάποιοι μαθητές δεν μπορούσαν να εκτελέσουν πράξεις με φυσικούς αριθμούς! Σε εκείνη την περίοδο κυκλοφόρησε μας ΗΠΑ το γνωστό περιβόητο βιβλίο του **Moris Kline** που κυκλοφόρησε και στην χώρα μας υπό τον τίτλο *«Γιατί δεν μπορεί να κάνει*

πρόσθεση ο Γιάννης; Η αποτυχία των μοντέρνων μαθηματικών.»

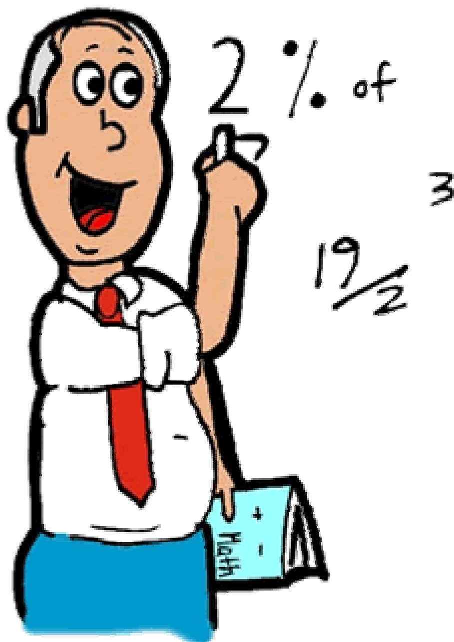
Τότε έγιναν μεγάλες συζητήσεις για τα μαθηματικά……

2.2 Η ΚΡΙΤΙΚΗ ΣΤΗΝ ΜΕΤΑΡΡΥΘΜΙΣΗ

Η ενδελεχής κριτική που ανεπτύχθη στα μοντέρνα μαθηματικά εκείνη την περίοδο επικεντρώθηκε στα εξής σημεία:

- Στην υπερβολική έμφαση στην αυστηρή δομή , στην αυστηρότητα και στον φορμαλισμό.
- Στην αποξένωση των μαθηματικών από τις φυσικές επιστήμες και τις εφαρμογές τους.
- Στην παραγνώριση της διδακτικής των μαθηματικών και κυρίως στο «πώς μαθαίνει ο μαθητής μαθηματικά»
- Στην υπερεκτίμηση της παραδοχής , ότι η κατανόηση της εσωτερικής δομής των μαθηματικών , οδηγεί στην μάθηση.
- Στην έλλειψη προετοιμασίας του διδακτικού προσωπικού να στηρίξει μια τέτοιας σημασίας μεταρρύθμιση.

- Στην υπερεκτίμηση της παραδοχής του Brouner , η οποία κάλυπτε ένα μικρό ποσοστό ταλαντούχων μαθητών.



Τότε δόθηκε το σύνθημα «πίσω πάλι στα παραδοσιακά μαθηματικά» αλλά τελικώς, δεν έγινε αυτή η επιστροφή, αλλά υπήρξε ένα σημείο ισορροπίας το οποίο ήταν η σύνθεση του παραδοσιακού και του νέου.

Τότε ,τέλει δεκαετίας του ΄70 , έχουμε ως κυρίαρχες τάσεις, τις εξής:

- Φεύγει από τα σχολικά εγχειρίδια η μεγάλη έκταση της συνολοθεωρίας , η αυστηρή απόδειξη και η αυστηρή θεμελίωση.
- Δίνεται έμφαση στις εφαρμογές των μαθηματικών και στις διαδικασίες επίλυσης προβλήματος.
- Συνδέονται τα μαθηματικά με άλλες επιστήμες.

Τα παραπάνω βεβαίως μόλις τώρα , προσπαθούμε να τα εισάγουμε στην Πατρίδα μας. .

2.3 ΤΙ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΓΝΩΡΙΖΕΙ ΕΝΑΣ ΜΑΘΗΤΗΣ ΥΠΟΧΡΕΩΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ.

Στα τέλη της δεκαετίας του ΄80 έχει κατασταλάξει η παγκόσμια μαθηματική κοινότητα στο τι πρέπει να γνωρίζει ένας μαθητής της Υ.Ε. σύμφωνα με το Εθνικό Συμβούλιο των διδασκόντων τα μαθηματικά- (National Council of Teacher's of Mathematics- NCTM)

Αυτά είναι:

- Να κατανοήσει τις βασικές μαθηματικές έννοιες.
- Ευχέρεια στην λογική σκέψη
- Δυνατότητα επικοινωνίας στην μαθηματική γλώσσα.
- Ευκολία στην αναγνώριση των μαθηματικών στον γύρω κόσμο.
- Δυνατότητα προσέγγισης των μαθηματικών προβλημάτων με αυτοπεποίθηση.
- Ικανότητα εφαρμογής των μαθηματικών γνώσεων σε πραγματικά προβλήματα.

Μια προσωπική κριτική θεώρηση στα παραπάνω , είναι ότι αποτελούν ένα καλό , άριστο ίσως ευχολόγιο, αλλά το αν είναι δυνατόν να πραγματοποιηθούν και σε ποίο ποσοστό, είναι ένα ανοικτό ζητούμενο . Οι στόχοι είναι σαφείς, αλλά τα μέσα και οι δυνατότητες πραγματοποίησής τους είναι ασαφείς και ισχνές.

3. Γιατί τελικά είναι δύσκολα τα μαθηματικά και ποιος είναι ο τύπος του έχοντος μαθηματικές δεξιότητες

3.1 ΓΙΑΤΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΙΝΑΙ ΔΥΣΚΟΛΑ

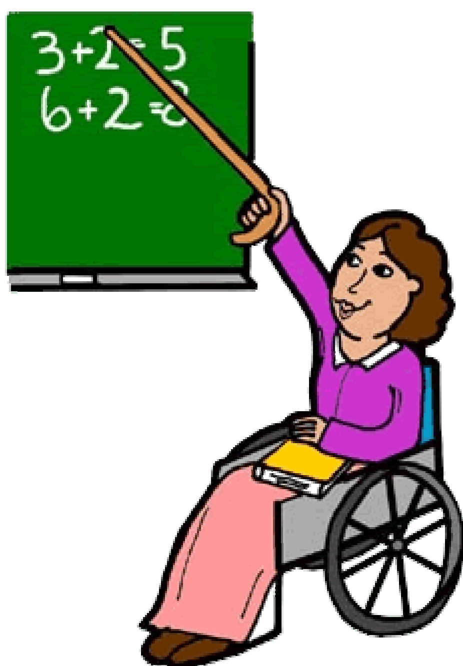
Αν και το ερώτημα είναι κλειστό , δεν πιστεύω ότι είναι δυνατόν να διαφωνήσει κάποιος καλόπιστα με την αντικειμενική δυσκολία των μαθηματικών η οποία έγκειται στα παρακάτω:

- Έχουν αφηρημένες και δυσνόητες έννοιες.
- Απαιτούν εντατική και συνεχή παρακολούθηση. Είναι γνωστή εξ άλλου η φράση που συνήθως λέμε: «Τα μαθηματικά είναι μια αλυσίδα. Αν σπάσει ένας κρίκος, δύσκολα επανασυνδέεται»
- Περιέχουν σύμβολα , τύπους , διαγράμματα πίνακες , τα οποία είναι δύσκολο να κατανοηθούν χωρίς τις κατάλληλες επεξηγήσεις.
- Δεν είναι ορατή η άμεση εφαρμογή τους στην καθημερινή μας ζωή, αλλά πρέπει να επεξηγηθεί με κατάλληλα παραδείγματα.

- Αποτελούν από μόνα τους μια ξέχωρη γλώσσα , την οποία καλούνται να μάθουν οι μαθητές.

3.2 ΤΟ ΠΡΟΤΥΠΟ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΕΞΙΟΤΗΤΑΣ

Σύμφωνα με **κοινώς παραδεκτές** απόψεις, ένα άτομο με **μαθηματικές δεξιότητες** χαρακτηρίζεται από :



- Αφαιρετική ικανότητα
- Ικανότητα αντίληψης του χώρου.
- Επαγωγική ικανότητα
- Παραγωγική ικανότητα
- Υπολογιστική ικανότητα
- Ικανότητα εφαρμογής γενικών αρχών σε αφηρημένες έννοιες καθώς και να εργάζεται με αυτές.
- Ικανότητα συμπύκνωσης και μνήμης.
- Μαθηματική φαντασία και διαίσθηση.
- Ικανότητα χρήσης συμβόλων και διαγραμμάτων.

4.Τι σημαίνει «μαθαίνω μαθηματικά» -Οι παράμετροι εκμάθησης.

4.1. ΤΙ ΣΗΜΑΙΝΕΙ ΜΑΘΑΙΝΩ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Μια σύνθεση των επικρατουσών απόψεων που απαντούν στο ανωτέρω ερώτημα είναι τα παρακάτω:

i) Συνειδητοποιώ την **δομή** των μαθηματικών και την θεμελίωσή τους.

ii) Μαθαίνω **αλγόριθμους** και **αποδεικτικές διαδικασίες.**

iii) Μαθαίνω να **διακρίνω** πότε θα χρησιμοποιώ τον έναν ή τον άλλον αλγόριθμο και πότε την μια ή την άλλη διαδικασία.

iv) Μαθαίνω να χρησιμοποιώ τα μαθηματικά στην **επίλυση προβλημάτων**

v) Μαθαίνω να **σκέπτομαι** με μαθηματικό τρόπο.

4.2 ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΠΟΥ ΚΑΘΟΡΙΖΟΥΝ ΤΟΝ ΒΑΘΜΟ ΤΗΣ ΓΝΩΣΗΣ.

Ο Βαθμός ποικίλει και εξαρτάται από τα παρακάτω:

i) Την κοινωνική και πνευματική **υποδομή** του μαθητή.

ii) Την συγκεκριμένη **φυσική και συναισθηματική** του κατάσταση

iii) Την **ποιότητα** της παρούσας και πρότερης εμπειρίας στην γνώση.

iv) Την **ποιότητα αλληλεπίδρασης** μεταξύ δασκάλου και μαθητή και μεταξύ των μαθητών.

v) Την **σημασία** που αποδίδουν στην μαθηματική γνώση οι ίδιοι οι μαθητές.

4.3. ΟΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΠΟΥ ΚΑΘΟΡΙΖΟΥΝ ΤΗΝ ΠΟΙΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΓΝΩΣΗΣ.

Η ποιότητα ποικίλει και βελτιώνεται από:

i) Την εξασφάλιση του **απαραιτήτου χρόνου** για συζήτηση και σκέψη πάνω σε νέα θέματα και εμπειρίες .

ii) Ευκαιρίες για **εμπέδωση και εξάσκηση**.

iii) Την **ομαδική** έρευνα

iv) Την νοητική **σύνδεση** λεκτικών, συμβολικών και νοητικών αναπαραστάσεων.

v) Την χρήση διαφόρων διδακτικών προσεγγίσεων , έτσι ώστε **όλοι οι μαθητές να μαθαίνουν**, ανεξάρτητα πώς το επιτυγχάνουν .

4.4 Η ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΕΚΜΑΘΗΣΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Καθορίζεται και εξαρτάται από :

i) Το **επιτυχημένο πέρασμα** από την χρήση της φυσικής γλώσσας , στην γλώσσα που χρησιμοποιείται στο μάθημα των μαθηματικών.

ii) Τον **βαθμό** με τον οποίο η νέα γνώση **συνδέεται** με την παλαιά.

iii) Την παρουσίαση **κατάλληλων παραδειγμάτων** –θεμάτων και τα οποία βοηθούν την δημιουργία νοητικών αναπαραστάσεων και τον σχηματισμό εικόνων , με στόχο την καλύτερη κατανόηση.

iv) Την δημιουργία στόχων, οι οποίοι να είναι τόσο **προκλητικοί**, ώστε οι μαθητές να κινητοποιούνται για την κατάκτηση της γνώσης.

v) Την **συχνότητα του προβληματισμού** που δημιουργείται από καταλλήλως επιλεγμένα θέματα. Την ποιότητα αλληλεπίδρασης μεταξύ δασκάλων και μαθητών και του βαθμού **υποστήριξης** των δασκάλων προς τους μαθητές.

vi) Την **ενθάρρυνση για διερεύνηση και προβληματισμό.**

5. Το φαινόμενο της Μαθηματικοφοβίας



5.1 Ο ΦΟΒΟΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥΣ

Ο φόβος για τα μαθηματικά είναι υπαρκτός λίγο πολύ σε όλους τους ανθρώπους αφού πρόκειται για μια αρκετά δύσκολη δραστηριότητα. Το ανησυχητικό είναι ότι ενίοτε ο μέχρι ενός ορισμένου σημείου φυσιολογικός φόβος (ή και το δέος για κάποια πράγματα) γίνεται φοβία . Η φοβία για τα μαθηματικά (που συχνά προσωποποιείται στους μαθηματικούς) φαίνεται στα πρόσωπα των συνομιλητών των μαθηματικών, όταν σε μια διαδικασία ρουτίνας όπου γίνονται οι συστάσεις

παγώνει το ευγενικό χαμόγελο στο άκουσμα της επαγγελματικής ιδιότητας :

-Τάδε Ταδόπουλος, μαθηματικός!……

Άλλοτε εκφράζεται μόνο δέος για την …ιδιότητα:

-Μαθηματικός ε;………Και πώς τα καταφέρνετε με όλα αυτά τα περίεργα πράγματα; Πω!-πω!….Με πιάνει πυρετός και που τ' ακούω!…….

Συνήθως όταν σε γράφει τροχονόμος στην εθνική οδό όπου συνήθως πας με 190 Km/h και τυχαίνει να πηγαίνεις την στιγμή της καταγραφής με 140Km/h (πταίσμα και άμεση σύλληψη) αλλά παρ΄ όλα ταύτα ο τροχονόμος σε γράφει μόνο για παράβαση του ορίου των 120 Km/h,(μόνο πρόστιμο) νοιώθεις την ανάγκη να πεις κι ένα «ευχαριστώ πολύ!»για την επιείκεια της αντιμετώπισης, για να εισπράξεις όμως και την απάντηση του τροχονόμου:

-Άλλη φορά να προσέχετε, να τρέχετε λιγότερο και ....να μην κόβετε τα παιδιά!….(Στον γράφοντα έχει τύχει τρεις φορές παρόμοιο περιστατικό!) Το να ψελλίσεις απολογούμενος ότι «....ξέρετε εγώ δεν …κόβω» είναι μάλλον μάταιο , καθώς το στερεότυπο κυριαρχεί και η συλλογική ευθύνη είναι …αναπόφευκτη:

-Σας ξέρουμε εσάς!……

Στην τηλοψία παρακολουθούμε αυθόρμητες ανερυθρίαστες και ….αναιδείς δημόσιες ομολογίες από διάφορα «πρότυπα» (οι…..μοντέλες!) :

-Εγώ ποτέ δεν ήμουν καλή στα μαθηματικά (γέλια) …φανταστείτε δεν ήξερα να κάνω πρόσθεση! (ηχηρότερα γέλια!) …τίποτα δεν ήξερα ! Ήμουν παντελώς άσχετη!……

Η παραπάνω κατ΄ ουσίαν έκφραση θριάμβου διότι παρ΄ ότι δεν ήξερε μαθηματικά πέτυχε στην ζωή της εκμεταλλευόμενη την κληρονομική σωματική της κατασκευή , δεν μπορεί να γίνει αναλογικά για άλλο μάθημα (λ.χ. Ιστορία) και να πει κάτι του ιδίου επιπέδου : «Δεν ήξερα ούτε με ποιους πολεμήσαμε το 1821» ή «ήμουν άσχετη με την μουσική και δεν ήξερα πόσες γραμμές έχει το πεντάγραμμο»

Το να μην γνωρίζεις μαθηματικά δεν είναι και τόσο απαξιωτικό, **διότι πάρα πολλοί δεν γνωρίζουν!** Η μεγάλη πλειονότητα! Ανήκουμε στην ασφάλεια της πλειονότητας! Άρα ουδείς ψόγος ή αισχύνη …..

Ένα σημαντικό και εξαιρετικά ανησυχητικό φαινόμενο που παρουσιάζεται τουλάχιστον στην Χώρα μας, είναι η ενδημούσα μαθηματικοφοβία των διδασκάλων των Δημοτικών, καθώς στην συντριπτική τους πλειονότητα προέρχονται από την πάλαι ποτέ «τρίτη δέσμη» η οποία αποτελούσε το μοναδικό «καταφύγιο» σε όσους

δεν τα κατάφερναν με τα μαθηματικά. Μια τέτοια αρνητική στάση προς τα μαθηματικά, δεν διορθώνεται κατά την διάρκεια της Πανεπιστημιακής φοίτησης (ίσως και να διογκούται μάλιστα) Στο τέλος βέβαια οδηγεί σε φαινόμενα του τύπου: «Η κυρία μας , μας κάνει περισσότερο γλώσσα απ΄ ότι μαθηματικά!» ή σε επαναλαμβανόμενα βασικά λάθη που εμμέσως ανακαλύπτει ο πανικόβλητος γονέας στο παιδί του καθώς το μικρό αποδεικνύεται ότι έχει δίκιο όταν ισχυρίζεται ότι «…αφού έτσι σου λέω μας το είπε η κυρία!» (Για να είμαστε δίκαιοι , όταν ακούμε έναν τέτοιο ισχυρισμό από μαθητή, συνήθως κατά 99% είναι λανθασμένος, αλλά αν τυχόν έχουμε…πέσει στο υπόλοιπο 1% , τα πράγματα είναι τραγικά)

5.2 Ο ΦΟΒΟΣ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Η αιτία μπορεί να είναι η ίδια η δυσκολία των μαθηματικών , η μικρή ή μεγάλη νοητική επάρκεια του μαθητή, η επάρκεια ή όχι του καθηγητή και άλλοι παράγοντες του οικογενειακού ή σχολικού περιβάλλοντος . Συνήθως είναι κάποιος συνδυασμός των παραπάνω σε μικρότερο ή μεγαλύτερο βαθμό. Η κατάληξη ενός τέτοιου φόβου και μιας συστηματικά επαναλαμβανόμενης αποτυχίας στα μαθηματικά οδηγεί

συνήθως στην γνωστή κατάσταση της **επίκτητης ανικανότητας**, όπου στο τέλος ο μαθητής πείθεται ότι δεν μπορεί να τα καταφέρει στα μαθηματικά και δεν καταβάλλει την παραμικρή προσπάθεια να τα αντιμετωπίσει, περιπίπτοντας σε έναν ατέρμονα φαύλο κύκλο ανατροφοδότησης της αποτυχίας του, από τον οποίον είναι εξαιρετικά δύσκολο να αποκοπεί. Τέτοιες καταστάσεις θα πρέπει να προλαμβάνονται εν τω γεννάσθαι, άλλως η δυσκολία αντιμετώπισής τους είναι δεδομένη.

6.Η διδασκαλία που προάγει την μαθηματική δεξιότητα

6.1 Η ΑΝΑΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΚΟΥ ΡΟΛΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Τα μαθηματικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να μπορέσουν να περιγράψουν, απεικονίσουν , ερμηνεύσουν , προβλέψουν και να εξηγήσουν. Πάνω απ΄ όλα όμως , χρησιμοποιούνται για να μεταφέρουν νοήματα. Αν οι μαθητές δεν μπορούν να ερμηνεύσουν το αποτέλεσμα μιας άσκησης στα μαθηματικά, τότε αυτό σημαίνει ότι η άσκηση είχε ελάχιστη έως καθόλου

αξία. Αν ξέρουν να λύνουν μια εξίσωση , αλλά δεν ξέρουν να καταστρώνουν μια απλούστερη όταν χρειάζεται σε ένα πρόβλημα (σύνηθες το φαινόμενο) τότε γίνεται λάθος στην διδασκαλία ή στα αναλυτικό πρόγραμμα ή και στα δύο. Πρέπει να γίνει κατανοητό, ότι ο απλός χειρισμός των αλγεβρικών παραστάσεων χωρίς την ανάδειξη του αναφορικού τους νοήματος, αποτελεί μια δευτερεύουσα δεξιότητα. Πρέπει να γίνει κατανοητό από μέρους του διδάσκοντα, ότι ο λόγος για τον οποίο διδάσκονται τα μαθηματικά είναι ένεκα της σημασίας που έχουν στην ανάλυση και την επικοινωνία των πληροφοριών και των ιδεών.

6.2 Η ΑΝΑΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΡΟΛΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΩΣ ΠΑΝΙΣΧΥΡΟΥ ΕΡΓΑΛΕΙΟΥ

Πρέπει να καταστεί σαφές, ότι αυτό που προέχει δεν είναι τα μαθηματικά καθ΄ εαυτά , αλλά τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή τους . Το αποτέλεσμα κάθε φορά μπορεί να είναι ένα έργο τέχνης, ένα πρότυπο στην χειροτεχνία, μια ανάλυση ενός πειράματος στην Φυσική, ο έλεγχος ενός λογαριασμού, ο σχεδιασμός ενός ταξιδιού , ο προϋπολογισμός του, η σχεδίαση ενός αυτοκινητόδρομου. Στις εφαρμογές αυτές λοιπόν βρίσκεται το ενδιαφέρον των μαθηματικών .

Οι δεξιότητες όπως :

- Η μέτρηση μήκους
- Η ικανότητα ανάγνωσης της ώρας
- Η κατασκευή ενός διαγράμματος
- Η σχεδίαση γεωμετρικών σχημάτων
- Η ικανότητα επιτυχούς διαίρεσης
- Η επίλυση μιας εξίσωσης,

δεν αποτελούν καθ΄ εαυτές δεξιότητες, αλλά μόνον όταν ενσωματώνονται σε δραστηριότητες που γίνονται για κάποιο σκοπό, δηλ. απλούστερα, όταν επιλύομε πρόβλημα.

Χαρακτηριστική είναι μια αποστροφή της επιτροπής Cockcroft [1] : «Τα μαθηματικά στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση, συχνά δεν αφορούν σε τίποτα συγκεκριμένο. Γίνεται αναγωγή ομοίων όρων ή χρήση των ιδιοτήτων των δυνάμεων , χωρίς να γίνεται αντιληπτό το γιατί. Υπάρχει υπέρμετρη ενασχόληση με δεξιότητες αποκομμένες από την οργανική τους ένταξη στην επίλυση προβλημάτων.»

[1] Το 1978 στην Βρετανία συνεστήθη αυτή η επιτροπή με απόφαση της Κυβέρνησης, η οποία θα εξέταζε το επίπεδο σπουδών στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση στην Αγγλία και Ουαλία. Κύριο έργο της επιτροπής ήταν κατά πόσον η διδασκαλία γίνεται καταληπτή και κατά πόσο δίνει έμφαση σε δεξιότητες που απαιτούνται για την παραπέρα επαγγελματική ανώτερη και ανώτατη εκπαίδευση του ατόμου. Η ολοκλήρωση των εργασιών της επιτροπής έγινε το 1981 χρόνον καθ΄ον και υπεβλήθη και το σχετικό πόρισμα των ερευνών της.

6.3 Η ΑΝΑΔΕΙΞΗ ΤΩΝ ΔΙΑΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ[2] ΣΧΕΣΕΩΝ

Η οργανική σύνδεση των διαφόρων μαθηματικών θεωριών είναι κάτι που δεν αναδεικνύεται . Η σφαιρική αντίληψη της μαθηματικής γνώσης είναι το ζητούμενο. Συνήθως οι μαθητές ξενίζονται όταν κάτι στέκεται ανάμεσα σε δύο διαφορετικούς τομείς. Τούτο συμβαίνει διότι δεν έχει γίνει η οργανική σύνδεση. Ευθύνες εδώ έχει μόνο ο δάσκαλος που θα πρέπει να ενθαρρύνει την διασύνδεση. Γίνομαι σαφής με χαρακτηριστικά παραδείγματα:

- Ένα θεώρημα το οποίο αποδεικνύεται με χρήση παραγώγων και ανάλυσης, μπορεί να το έχει αποδείξει με κλασική απλή γεωμετρία ο Ευκλείδης . Εκεί ο διδάσκων θα σταθεί, θα πει και τους δύο τρόπους και θα πει και τις ποιοτικές διαφορές τους .

Αν για παράδειγμα έχει να λύσει το πρόβλημα που λέει «Από όλα τα παραλληλόγραμμα σταθερής περιμέτρου μέγιστο εμβαδόν έχει το τετράγωνο» Μπορεί να το λύσει όπως ο Ευκλείδης πρώτα, με απλό στοιχειώδη τρόπο[3] έπειτα να το λύσει με κλασική άλγεβρα με

[2] Μπορεί αυτός ο καινοφανής όρος να θεωρηθεί ως δόκιμος νεολογισμός , διότι εκφράζει ετυμολογικά την πλέον συνήθη χρήση της πρόθεσης «δια» δηλ. «δια + μαθηματικά» → Δυναμική ένταξη κάποιων σχέσεων, σε περισσότερες της μιας μαθηματικής θεωρίας.(λ.χ. Κάτι που φαίνεται να αποτελεί τμήμα της θεωρίας αριθμών, να προκύπτει με αλγεβρικό τρόπο , να εκφράζει θεώρημα του απειροστικού λογισμού και ταυτοχρόνως να έχει μια γεωμετρική ερμηνεία) Ο γράφων φρονεί ότι λόγω της ιδιαιτερότητας της ποιότητας της Ελληνικής γλώσσας τέτοιοι νεολογισμοί γίνονται άμεσα αντιληπτοί χωρίς ιδιαίτερες επεξηγήσεις σε ακροατήριο μαθηματικών.

[3] Να πάρει δύο ισοπεριμετρικά σχήματα ένα ορθ. παραλληλόγραμμο και ένα τετράγωνο και να δείξει ότι το τετράγωνο έχει μεγαλύτερο εμβαδόν.

διακρίνουσα τριωνύμου[4] και εύρεση της μέγιστης τιμής της και έπειτα με παραγώγιση[5] της σχετικής συνάρτησης και ευρέσεως του μεγίστου της . Το συμπέρασμα είναι ότι για να το αποδείξουμε με τον τρόπο του Ευκλείδη θα πρέπει να γνωρίζουμε εκ των προτέρων το αποτέλεσμα (ότι είναι το τετράγωνο) ενώ με τον τρόπο του απειροστικού λογισμού μπορούμε θα καταλήξουμε στο τετράγωνο ως λύση , χωρίς να την γνωρίζουμε εκ των προτέρων. Αυτός ακριβώς είναι και ο λόγος που τα αρχαία Ελληνικά μαθηματικά δεν έδιναν παραγωγικά αποτελέσματα αλλά απεδείκνυαν γνωστά αποτελέσματα, αποτελέσματα που ήσαν γνωστά με μηχανικές μεθόδους. Επίσης η λύση με άλγεβρα καθίσταται δυνατή επειδή ανάγεται σε τριώνυμο το οποίο έχει μελετηθεί ιστορικά επισταμένως. Ακόμα και η ανώτερη γενική άλγεβρα δεν μπορεί να απαντήσει για περιπτώσεις πολυωνύμων άνω του τετάρτου βαθμού (δεν υπάρχουν τύποι για τις ρίζες) όμως ο Απειροστικός λογισμός παρακάμπτει πάρα πολλές από τις αδυναμίες των άλλων κλάδων στην συγκεκριμένη κλάση προβλημάτων…..

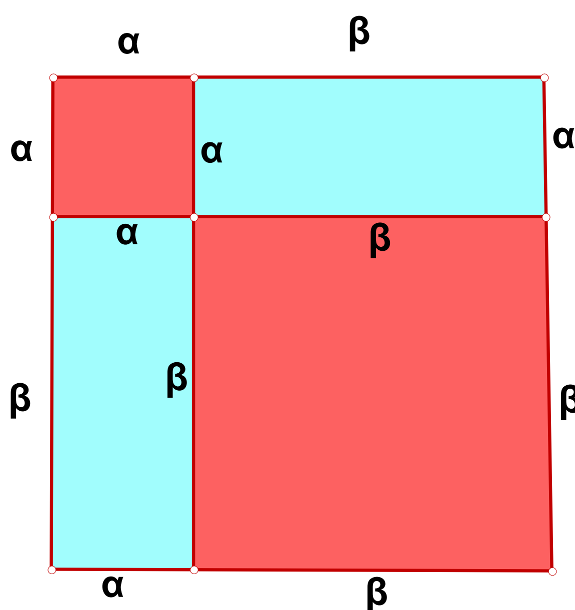
---

[4] Το τριώνυμο $E(\chi)=-\chi^2+\frac{\Pi}{2}\chi$ έχει Δ= $E''(\chi)=-2<0$ $\frac{\Pi^2}{4}-4E$ και πρέπει $\Delta\geq 0$, με ελάχιστο όταν Δ=0 κτλ.

[5] Η συνάρτηση $E(\chi)=-\chi^2+\frac{\Pi}{2}\chi$ έχει $E'(\chi)=-2\chi+\frac{\Pi}{2}$, $E''(\chi)=-2<0$ απ΄ όπου κατά τα γνωστά προκύπτει το ζητούμενο.

Μια παρατήρηση όπως η παραπάνω **οριοθετεί** τις δυνατότητες των μαθηματικών θεωριών και **επεξηγεί πειστικά** τις αναγκαιότητες εύρεσης των νέων θεωριών των πλεονεκτημάτων τους κτλ.

Σε μικρότερες τάξεις, η διδασκαλία της ταυτότητας $(a+\beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$ επιβάλλεται να συνδεθεί και με την γεωμετρική της σημασία με τα εμβαδά , που είναι η παρακάτω:



Τέτοια παραδείγματα συνδέοντα άλγεβρα με Γεωμετρία τριγωνομετρία, θεωρία αριθμών ανάλυση και όχι μόνον, μπορεί να αντλήσει ο ενδιαφερόμενος εκπαιδευτικός από το θαυμάσιο βιβλιαράκι του Ρότζερ Νίλσεν «Αποδείξεις χωρίς λόγια» που κυκλοφορεί στα Ελληνικά από τις εκδόσεις Σαββάλα και το οποίο δεν είναι δυνατόν να λείπει από την βιβλιοθήκη κάθε μαθηματικού.

Το συγκεκριμένο βιβλίο καλύπτει μια καινούργια οπτική των μαθηματικών μέσω της λεγόμενης «οπτικής σκέψης» αφού η εποπτεία που κυριαρχεί πλέον μέσω

των πολυμέσων και των Η/Υ έχει τους δικούς της κανόνες που οι ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών και οι ψυχολόγοι αρχίζουν να ανιχνεύουν . Κάποιοι μάλιστα φθάνουν στο σημείο να ομιλούν για αποδείξεις δίχως λόγια! Τόσο μεγάλη δύναμη έχει η εποπτεία!!!

Ένα αντίστοιχο φαινόμενο έχουμε και στα νέα ισχυρά λογισμικά διδασκαλίας της Γεωμετρίας όπως είναι το Sketchpad το οποίο ήδη έχει εισαχθεί στην ΜΕ και το εγχειρίδιο του οποίου είναι τουλάχιστον σε όγκο μεγαλύτερο από το εν χρήσει εγχειρίδιο Γεωμετρίας. Το εργαλείο λοιπόν έχει μεγαλύτερο όγκο από το αντικείμενο εφαρμογής του! Αλλά οι δυνατότητές του πλέον είναι τόσο πολλές που τροποποιούν την οπτική και το περιεχόμενο της ίδιας της Γεωμετρίας. Με τον ίδιο τρόπο που ελέχθη για την τηλοψία ότι το «μέσον είναι πλέον το μήνυμα» θα μπορούσαμε με μια δόση υπερβολής να πούμε ότι «το λογισμικό Sketchpad είναι η Γεωμετρία».

Για να γίνουμε πειστικοί ας πούμε δύο μόνο πλεονεκτήματα από τα πολλά του λογισμικού:

1. Μπορεί ο τελευταίος μαθητής , να ανακαλύψει μια νέα άσκηση Γεωμετρίας , την οποία ουδείς Ιησουΐτης μοναχός μπόρεσε να ανακαλύψει!

2. Μπορεί ο τελευταίος μαθητής να δει έναν Γεωμετρικό τόπο τον οποίο με μεγάλη δυσκολία και κόπο θα μπορούσε να ανακαλύψει ο καλύτερος μελετητής της Γεωμετρίας.
3. μπορούν τα σχήματα να κινηθούν ανάλογα και με τον τρόπο κατασκευής τους και να ανακαλυφθούν όλες οι ειδικές περιπτώσεις τους, να έχω το τέλειο σχήμα για μελέτη και πολλά άλλα που δεν μπορούσα να έχω τα 2.000 και πλέον χρόνια που μελετάται η Ευκλείδεια Γεωμετρία. …..

Είμαστε επομένως προ μιας επαναστάσεως που έχει ήδη γίνει και που για να γίνει αντιληπτή στην εκπαίδευση πρέπει να γίνουν κάτοχοι των εργαλείων όλοι οι εκπαιδευτικοί για να μπορέσουν να τα χρησιμοποιήσουν σωστά για τους μαθητές τους.

Πρέπει να θεωρείται δεδομένο ότι το περιεχόμενο των μαθηματικών δεξιοτήτων τροποποιείται από την ύπαρξη τέτοιων εργαλείων τα οποία επάγουν έναν νέο ποιοτικό τρόπο προσέγγισης της γνώσης .Η πρόκληση για τους διδάσκοντες είναι πλέον μεγάλη και το ζητούμενο είναι η προσαρμογή τους στην νέα πραγματικότητα , άλλως η υποβάθμιση των γνώσεών τους, **η οποία πρέπει ήδη να θεωρείται δεδομένη,** θα έχει επιπτώσεις στις δεξιότητες και των εκπαιδευομένων μαθητών τους.

6.4 Η ΑΝΑΔΕΙΞΗ ΤΗΣ ΓΟΗΤΕΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Τα μαθηματικά , ανεξάρτητα από την ωφελιμιστική τους αξία έχουν και μια γοητεία η οποία μπορεί να επηρεάσει πολλά παιδιά, ίσως όχι στην ίδιο βαθμό, αλλά αποφασιστικά. Μπορεί να αναδειχθούν απρόσμενες εφαρμογές τους , αναπάντεχες λύσεις, κομψά αποτελέσματα, γοητευτικές ιστορίες ανακάλυψής τους κτλ.

Κύριος φορέας ανάδειξης της γοητείας είναι η προσωπικότητα και ο ενθουσιασμός του ιδίου του εκπαιδευτικού. Αν ο ίδιος ο εκπαιδευτικός δεν είναι ερωτευμένος με το αντικείμενό του , είναι αδύνατον να τον εμπνεύσει σε τρίτους και αυτό είναι προφανές και απόλυτο.

6.5 ΠΡΟΑΓΩΓΗ ΦΑΝΤΑΣΙΑΣ ΕΥΛΥΓΙΣΙΑΣ ΣΚΕΨΗΣ & ΠΡΩΤΟΒΟΥΛΙΑΣ

Πρέπει τα παιδιά να ενθαρρύνονται να λύνουν την άσκηση με τον δικό τους τρόπο, άσχετα αν αυτός δεν είναι ο πλέον δόκιμος. Είναι έγκλημα η αποθάρρυνση που συνεπάγεται η δια της βίας συμμόρφωση με τον αλγόριθμο του βιβλίου. Είναι τόσο ριζωμένα μερικά πράγματα , ώστε ακόμα και εκπαιδευτικοί να σε κοιτούν

παράξενα αν αναφέρεις ότι οι εξισώσεις με παρονομαστή εκτός του τρόπου της απαλοιφής των παρονομαστών δια πολλαπλασιασμού και των δύο μελών με το ΕΚΠ τους, επιλύονται και με αυτό που έχουν μάθει όλα τα παιδιά από μικρά: Με μετατροπή των κλασμάτων σε ομώνυμα!…..

Ένα άλλο παράδειγμα:

Υπάρχουν άτυποι αλγόριθμοι πολλαπλασιασμού όπου δεν έχουν διδαχθεί ποτέ , αλλά όλοι οι μαθητές εξ ενστίκτου τους ανακαλύπτουν από μόνοι τους. Λόγου χάριν, όταν έχουμε να εκτελέσουμε πρόσθεση από μνήμης προσθέτουμε πρώτα της μονάδες ανώτερης τάξης και κατόπιν τις μονάδες κατώτερης τάξης, δηλαδή κατ΄ αντίστροφη σειρά από τον κλασικό αλγόριθμο με μολύβι και χαρτί. Αυτό βεβαίως γίνεται λόγω της γνωστής αδυναμίας της βραχυπρόθεσμης μνήμης να απομνημονεύει επιτυχώς τα κρατούμενα . Το να ψέγει όμως ο καθηγητής τον μαθητή που το χρησιμοποιεί είναι απαράδεκτο.

Είναι βέβαιο, ότι οι άνθρωποι όταν φύγουν κι απ΄ το σχολείο θα χρησιμοποιήσουν ακόμα και τα χέρια τους για την αρίθμηση ή την πρόσθεση . Πρόκειται για γεγονός . Αν κάποιος δεν ξέρει την δύναμη της Ιστορικής διαδρομής του αλγόριθμου ανά την υφήλιο και τους πολιτισμούς μπορεί να είναι αυστηρός. Αν την

ξέρει, μπορεί να έχει την σωστή κατανόηση του φαινομένου.

6.6 ΠΡΟΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Μπορεί η προαγωγή της φαντασίας και της πρωτοβουλίας να έρχεται σε αντίθεση με τον στόχο της συστηματικής εργασίας στην τάξη, αλλά αυτό είναι μόνο φαινομενικό. Κάθε τελικό αποτέλεσμα που παράγεται μέσα στην τάξη θα πρέπει να συζητείται να ελέγχεται και να ερμηνεύεται. Επίσης η στρατηγική που επιλέγεται κάθε φορά πριν την εφαρμογή της θα πρέπει επίσης να επισημαίνεται. Μόνο τότε έχουμε συνείδηση επακριβή του τι κάνουμε κάθε φορά και του τι βρίσκουμε , πράγμα που είναι σημαντικό για την προαγωγή της μαθηματικής δεξιότητας των μαθητών. Όταν υπάρχουν οι διαδικασίες αποτίμησης, διερεύνησης , ανασκόπησης και αναστοχασμού .

6.7 ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΑΝΟΙΚΤΩΝ ΕΙΤΕ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Γενικά ως ανοικτό χαρακτηρίζουμε ένα πρόβλημα το οποίο έχει μια «χαλαρή» διατύπωση , λιγότερα ή

περισσότερα δεδομένα απ όσα χρειάζονται για την επίλυσή του , τα δε ζητούμενα είναι κι αυτά «ανοικτά» υπό την έννοια ότι υπάρχουν εκφράσεις του τύπου «να εξεταστεί ποία συσχέτιση μπορεί να υπάρχει μεταξύ των τάδε και τάδε ποσοτήτων» και άλλες παρόμοιες. Αντίθετα ως «κλειστό» χαρακτηρίζεται ένα πρόβλημα όπου έχει όλα τα δεδομένα , χρησιμοποιούνται όλα στην λύση , ενώ η απάντηση είναι κι αυτή «κλειστή» δηλαδή μονοσημάντως και εκ των προτέρων αναμενόμενη. Επειδή υπάρχουν κι ενδιάμεσες καταστάσεις η ταξινόμηση των προβλημάτων ως προς την κλειστότητα φαίνεται στον παρακάτω πίνακα, ‘όπου εμφαίνεται η κατάταξη των προβλημάτων ανάλογα με την διατύπωση και την ζητούμενη απάντηση:

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ	*Ανοικτής διατύπωσης*	*Κλειστής διατύπωσης*
Ανοικτής απάντησης	I.	II.
Κλειστής απάντησης	III.	IV.

Πρέπει να αναφέρουμε ότι η συντριπτική πλειονότητα των εμφανιζομένων προβλημάτων στα σχολεία ανήκουν στην κλάση IV. και ελάχιστα στις άλλες τρεις δυνητικές κλάσεις. Όμως ο γόνιμος βαθύς και

πολυεπίπεδος προβληματισμός γίνεται με δραστηριότητες και προβλήματα του τύπου Ι. που λείπουν παντελώς από τα διδακτικά εγχειρίδια.

Επίσης όταν λέμε πραγματικά προβλήματα εννοούμε προβλήματα που έχουν προκύψει άμεσα από την ίδια την ζωή και όχι τεχνικές κατασκευές που μοιάζουν με προβλήματα . Για να γίνουμε σαφείς υπενθυμίζουμε το γνωστό θέμα των Πανελλαδικών εξετάσεων με τα μερμήγκια που κατασκεύαζαν τετράγωνο κτλ. Αυτό αποτελεί ένα καλό παράδειγμα προς αποφυγήν για τα «πραγματικά προβλήματα» και τα ψυχολογικά κίνητρα για ενασχόληση (εδώ ..αντικίνητρα!) που μπορούν να προκαλέσουν στους μαθητές..

6.8 ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ & ΕΙΣ ΒΑΘΟΣ ΜΕΛΕΤΗ

Η συνεργασία των μαθητών θα πρέπει να ενθαρρύνεται διότι μπορεί να αποδώσει αρκετά καλά μαθησιακά αποτελέσματα. Μια ευρύτερη ομάδα μαθητών μπορεί να ασχοληθεί με μια μεγάλη εργασία την οποία μπορεί να παρουσιάσει στην τάξη (Κοινωνικός επιοικοδομισμός) Η εργασία σε Η/Υ μπορεί να αποδώσει άριστα αποτελέσματα με ομάδες μαθητών ανά δύο, χωρίς φυσικά να καταργείται η κατά μόνας και κατ΄ οίκον εργασία.

Λέγοντας ανεξαρτησία εννοούμε ότι θα πρέπει οι μαθητές να αφεθούν να δουλέψουν όχι μόνο βάσει του διδακτικού εγχειριδίου και χωρίς την κατ΄ ανάγκην καθοδήγηση του δασκάλου.

Για την εις βάθος μελέτη , έχουμε παρατηρήσει, ότι επειδή τα μικρά παιδιά δεν μπορούν να συγκεντρωθούν επί πολύ σε ένα έργο, συνιστάται για τους μεγάλους μαθητές. Οι δεξιότητες που προάγονται δεν είναι καθαρά μαθηματικές, αλλά είναι επιθυμητές παράπλευρες τοιαύτες. Σε μια σε βάθος μελέτη ενός αντικειμένου έχουμε την εμπειρία της σε βάθος εκμάθησης και της αυτοπεποίθησης που απορρέει από αυτό («Για το τάδε θέμα έχω κάνει μελέτη και το γνωρίζω καλώς!») Η υπομονή και η επιμονή είναι τα άλλα παράπλευρα επιθυμητά στοιχεία που προάγονται.

6.9 ΚΤΙΣΙΜΟ ΤΗΣ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ ΤΩΝ ΠΑΙΔΙΩΝ ΣΤΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΤΟΥΣ ΙΚΑΝΟΤΗΤΕΣ.

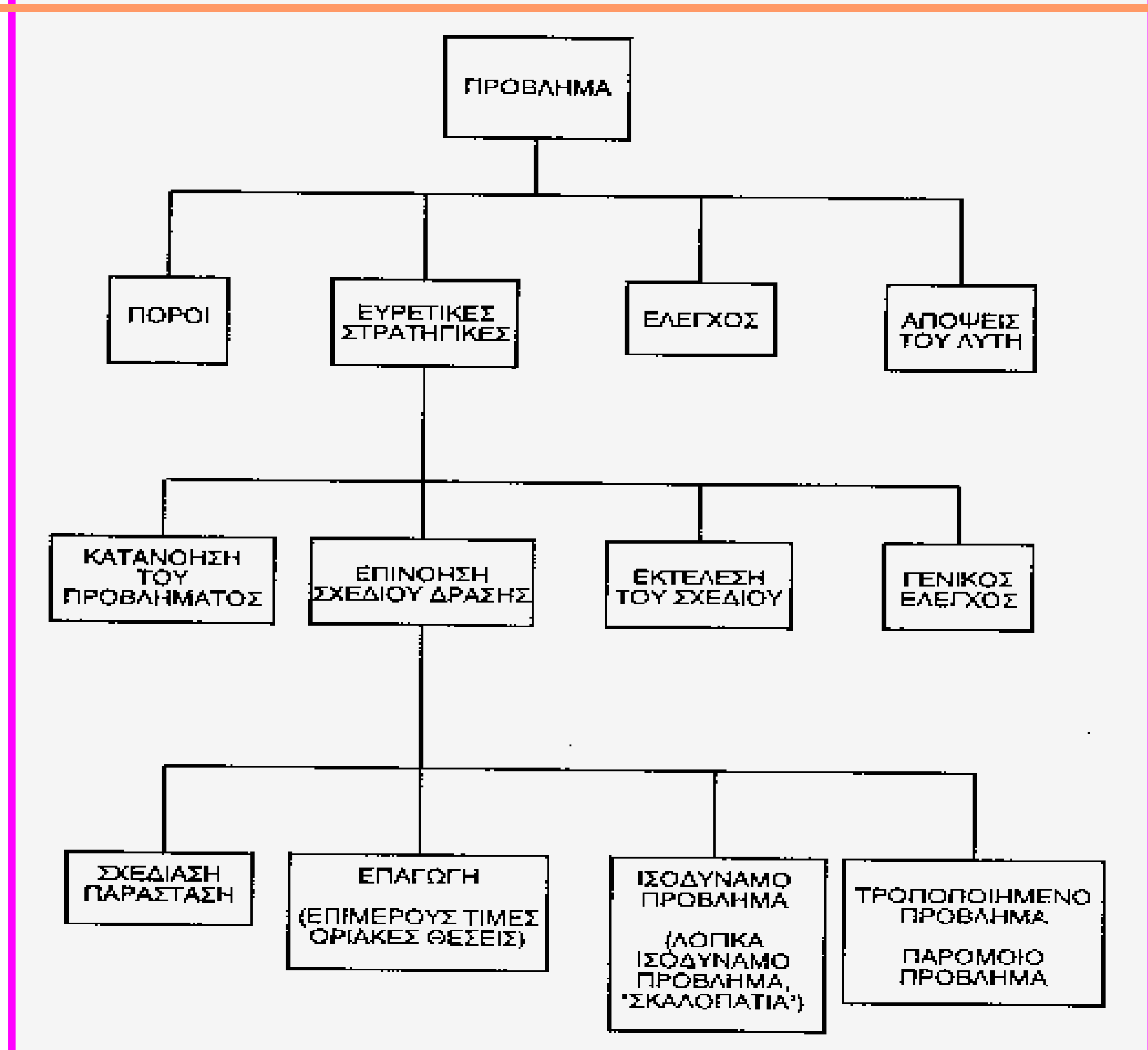
Τα μαθηματικά είναι μια διαδικασία από την οποία μπορούν να αντλήσουν ευχαρίστηση τα παιδιά. Λογικές απόρριψης στις εξετάσεις της υποχρεωτικής ιδίως εκπαίδευσης δεν θα πρέπει να πρυτανεύουν. Τα καθήκοντα των μαθητών πρέπει να είναι ανάλογα με τις ικανότητές τους και να αντιμετωπίζονται και ατομικά. Η

ενασχόληση των παιδιών με ασκήσεις ή άλλες δραστηριότητες δεν θα πρέπει να γίνεται υπό το άγχος της απόρριψης και εν πάση περιπτώσει ο καθηγητής που ενεργεί κι ως δικαστής θα πρέπει να έχει συνεχώς κατά νου, ότι η επιείκεια είναι δίδυμη αδελφή της δικαιοσύνης.

7. Η νεώτερη έρευνα πάνω στην ικανότητα επίλυσης προβλημάτων

Η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων θεωρείται και είναι συνώνυμη με την μαθηματική δεξιότητα. Ερευνητές έχουν κάνει νεώτερες έρευνες πάνω στην ικανότητα επίλυσης προβλημάτων, στην ικανότητα αναλογικής σκέψης και στην ποιοτική κατάταξη των προβλημάτων.

Η φιλοδοξία και ο απώτατος στόχος των ερευνών είναι να μπορέσουν να τεθούν αποτελεσματικοί ευρετικοί κανόνες για όλους τους τύπους των προβλημάτων, πράγμα το οποίο πρέπει να θεωρείται ακόμα πρόωρο , αλλά όχι και αδύνατο.



7.1 ΥΠΑΡΧΕΙ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΕΠΑΥΞΗΣΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΔΕΞΙΟΤΗΤΩΝ;

Η απάντηση δεν είναι τελείως θετική αλλά ούτε και αρνητική. Υπάρχουν οι Ευρετικές μέθοδοι γενικές και ειδικές. Γι αυτές λόγος άρχισε να γίνεται μετά από το 1945 όπου ο Polya έκανε τις εργασίες του πάνω στις ευρετικές μεθόδους επίλυσης προβλημάτων και έγραψε το περίφημο βιβλίο του «Πώς να το λύσω» Από τότε , οι απόψεις πάνω σε αυτά έχουν διαφοροποιηθεί, αλλά ο πυρήνας τους είναι αλώβητος.

Η Ευρετική μέθοδος δεν είναι η πανάκεια δια πάν πρόβλημα , αλλά κάποιοι γενικοί κανόνες μπορούν να εφαρμοσθούν πάνω σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα και να οδηγήσουν αποτελεσματικά στην λύση του. Αν δεν ξέρεις την θεωρία, η Ευρετική δεν μπορεί να σε βοηθήσει, αλλά αν την ξέρεις, μπορεί να σε βοηθήσει να την εκμεταλευθείς στο έπακρο. Βεβαίως δεν μπορεί κάποιος να περιμένει θαύματα ούτε εγγυημένα αποτελέσματα από την εφαρμογή της. Σε κάθε περίπτωση όμως η εκμάθηση των βασικών αυτών κανόνων , έχει αποτιμηθεί ότι βοηθά και προάγει την μαθηματική ικανότητα μαθητών , φοιτητών και καθηγητών. Αξίζει ο κόπος να τις παραθέσουμε ώστε να εξηγηθεί και το παραπάνω σχήμα:

Οι πόροι που παρεμβαίνουν στον λύτη είναι:

i) Οι πόροι , δηλαδή τα «ενεργειακά απόθέματα-διαθέσιμα» του λύτη.
ii) Οι ευρετικές Στρατηγικές
iii) Ο έλεγχος
iv) Οι γενικότερες απόψεις του λύτη.

Οι παράγοντες αυτοί συμπλέκονται με ορισμένο τρόπο, ανάλογα με την λύση και το πρόβλημα. Οι παραπάνω παράγοντες, θα παίξουν καθοριστικό ρόλο στο αν θα οδηγηθεί ή όχι στην λύση προβλήματος ο λύτης. Η ανακάλυψη των γενικών στρατηγκών είναι ένα ιδιαίτερα πολύπλοκο πρόβλημα και απαιτεί συνεργασία πολλών και

διαφορετικών κλάδων, όπως είναι η Ψυχολογία, η Κοινωνιολογία και η Λογική . Οι Τεχνικές και στρατηγηκές αποβλέπουν στην διτύπωση οδηγιών για γενικές καταστάσεις προβληματισμού (Γενικές Στρατηγηκές) και όχι περιπτωσιολογικές (Ειδικές –«φροντιστηριακές» στρατηγηκές)

7.1.1. ΟΙ ΕΥΡΕΤΙΚΕΣ ΣΤΡΑΤΗΓΗΚΕΣ

περιλαμβάνουν τέσσερα στάδια:

- Κατανόηση του προβλήματος
- Επινόηση σχεδίου δράσης
- Εκτέλεση του σχεδίου
- Γενικός έλεγχος.

7.1.2 ΟΙ ΠΟΡΟΙ

Γνώσεις τεχνικές , μέσα , αλγόριθμοι, είναι τα συνήθη αποθέματα. Αυτό έχει να κάνει και με το επίπεδο στο οποίο τα διθέτει ή τα έχει κατανοήσει ήδη ο λύτης, πάντα βεβαίως σε σχέση και με το συγκεκριμένο πρόβλημα.

7.1.3 ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Απαντάμε στα εξής ερωτήματατα:

- Ποίοι είναι οι άγνωστοι του προβλήματος;
- Ποια είναι τα δεδομένα; Οι συνθήκες;
- Είναι δυνατόν να ικανοποιείται η συνθήκη (-ες)
- Είναι επαρκής η συνθήκη για να προσδιορίσουμε τον άγνωστο; Είναι αναπαρκής ; Είναι περιττή; Είναι αντιφατική;

- Φτιάξτε ένα διάγραμμα /σχέδιο, Ονομάστε, δώστε συμβολισμούς.
- Ξεχωρίστε τα μέρη της συνθήκης. Μπορείτε να τα γράψετε με την βοήθεια του συμβολισμού;

7.1.4. ΕΠΙΝΟΗΣΗ ΣΧΕΔΙΟΥ ΔΡΑΣΗΣ

- Μήπως ξανασυναντήσατε το πρόβλημα;
- Ξέρετε παρόμοιο πρόβλημα;
- Κυττάξτε τους αγνώστους. Σας θυμίζουν κανένα άλλο πρόβλημα ή άγνωστος Να ένα πρόβλημα που ταιριάζει με το δικό μας . Μπορείτε να το προσαρμόσετε στις εδώ συνθήκες; Μήπως μπορείτε να επαναδιατυπώσετε το πρόβλημα; Θυμηθείτε τους ορισμούς.
- Δοκιμάστε να λύσετε ένα παρόμοιο πρόβλημα.
- Δοκιμάστε ένα πιο ειδικό.
- Δοκιμάστε ένα ανάλογο
- Μήπως μπορείτε να λύσετε ένα μέρος του προβλήματος; Κρατήστε μέρος της συνθήκης σταθερό. Μπορείτε να προσδιορίσετε τώρα τον άγνωστο; Πώς μεταβάλλεται ο άγνωστος τώρα;
- Μπορείτε να αλλάξετε τον άγνωστο , τα δεδομένα ή και τα δύο ώστε να έλθουν πιο κοντά;
- Χρησιμοποιήσατε όλα τα δεδομένα; Όλες τις συνθήκες; Λάβατε υπ΄όψιν όλες τις έννοιες που εμφανίζονται στο πρόβλημα;

7.2 Η ΑΝΑΛΟΓΙΚΗ ΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Στο βιβλίο του Hank Kahney «Λύση Προβλημάτων» έχουμε πορίσματα ερευνών πάνω στο φαινόμενο της μεταβίβασης της μάθησης , δηλαδή, πιο συγκεκριμένα, οι άνθρωποι αντιμετωπίζουν σημαντική δυσκολία στην προσπάθειά τους να μεταβιβάσουν ό,τι ξέρουν για την επίλυση ενός προβλήματος συγκεκριμένου τύπου, όταν αντιμετωπίζουν ένα πρόβλημα του ιδίου τύπου.

Η έρευνα έδειξε, ότι πολλές φορές θα πρέπει να δοθεί στα υποκείμενα η πληροφορία ότι μεταξύ των προβλημάτων υπάρχει μια σχέση για να εφαρμόσουν την γνώση που ήδη έχουν εφαρμόσει στο πρώτο. Μάλιστα, εάν το καινούργιο ανάλογο πρόβλημα ήταν περισσότερο πολύπλοκο από το πρώτο, τότε η πρότερη εμπειρία δεν βοηθούσε καθόλου στην επίλυση. Και στις έρευνες που έκαναν οι GicK & Holyoak όσο και οι Reed, Dempster , Ettinger στην αναλογική σκέψη και λύση προβλημάτων, φάνηκε ότι χρειάζεται σημαντική βοήθεια για να ανακαλυφθεί η αναλογία μεταξύ δύο προβλημάτων και πρέπει να γίνουν σημαντικές νύξεις για να γίνει αντιληπτή.

Μια εφαρμογή των πορισμάτων αυτών των ερευνών θα μπορούσε να έχει πεδίο εφαρμογής την συγγραφή διδακτικών εγχειριδίων , στα οποία ορισμένοι συγγραφείς παραθέτουν ασκήσεις οι οποίες έχουν ελάχιστη σχέση με τα λυμένα υποδειγματικά παραδείγματα που έχουν ήδη παραθέσει σε άλλα κεφάλαια , με αποτέλεσμα οι μαθητές να αντιμετωπίζουν τεράστιες δυσκολίες.

Τελικά φαίνεται ότι η παλαιά διαπίστωση ότι «αν δεν μπορείς να λύσεις μια άσκηση , είναι διότι δεν έχεις λύσει μια υπάρχουσα ευκολότερη» είναι αληθής, αλλά στην συγγραφή των διδακτικών εγχειριδίων η σειρά των ασκήσεων και η επιλογή αυτών που θα λυθούν , πρέπει να γίνεται με τεράστια προσοχή. Με ανάλογη προσοχή θα πρέπει να επιλέγει ο διδάσκων το ποιες θα δίδει για κατ΄ οίκον εργασία , ποιες θα επιλύει στην τάξη και με ποια σειρά , κάτι το οποίο μέχρι τώρα γίνεται μάλλον επιπόλαια…..

7.3 Η «ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΧΩΡΟΥ» & Η ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Η ανάλυση κατάστασης χώρου του προβλήματος , είναι να βρούμε όλες τις κινήσεις που επιτρέπονται από τους κανόνες του προβλήματος. Ως λύση προβλήματος, θα

μπορούσαμε να ορίσουμε την ανακάλυψη ενός δρόμου, μέσα από πιθανές κινήσεις. Αλλά μια τέτοια αντικειμενική ανάλυση, είναι δυνατή μόνο μέσα από προβλήματα τύπου σπαζοκεφαλιών .

Οι άνθρωποι , λόγω περιορισμού στην χωρητικότητα της μνήμης εργασίας, συνήθως χάνονται μέσα σε τέτοια προβλήματα , επειδή η στρατηγική μέσων και στόχων για την αξιολόγηση της απόστασης από την λύση, συνήθως τους οδηγεί σε μακριά από την λύση.

Στην εκπαίδευση, αν παρατηρήσουμε αρχάριους μαθητές να προσπαθούν να λύσουν προβλήματα μαθηματικών ή προγραμματισμού Η/Υ, συχνά επιλέγουν χειρισμούς εντελώς στην τύχη. Μπορεί να κάνει και δέκα προσπάθειες και να αποτύχει. Αλλά με αρκετή υπομονή, μπορεί να βρει μια λύση που ίσως να μην την καταλαβαίνει και αυτό να το επιτύχει μέσα από διαδικασίες περιορισμού των ατελέσφορων διαδικασιών που επιτέλεσε προηγουμένως. Σύμφωνα με ανάλυση του Simon , ακόμα κι αν ο μαθητής έφθασε στην τύχη σε μια λύση, αυτό από μόνο του παρέχει μια βάση για περαιτέρω μάθηση.

7.4 ΟΙ ΑΡΧΑΡΙΟΙ ΚΑΙ ΟΙ ΕΙΔΙΚΟΙ

Μια διαπίστωση ,είναι ότι οι περισσότεροι μαθητές , μαθαίνουν να λύνουν αποτελεσματικά προβλήματα μαθηματικών, μόνο με το να αφιερώνουν εκατοντάδες ή χιλιάδες ώρες από τον χρόνο τους στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Και βέβαια, μέσα από αυτή την υπερβολική εξάσκηση επωφελούνται μόνο οι καλοί λεγόμενοι μαθητές.

Μια σημαντική κατεύθυνση της έρευνας που ασχολείται με τις διαφορές αρχαρίων και ειδικών , έχει να κάνει με την αναγνώριση των περισσοτέρων στρατηγικών που χρησιμοποιούν οι ειδικοί. Επίσης , μια σημαντική εξέλιξη στην έρευνα είναι ότι οι ψυχολόγοι ήδη ερευνούν πολύ σοβαρά την πιθανότητα να διδαχθούν κατ΄ ευθείαν από τους αρχάριους στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων.

7.5 Η ΕΞΑΣΚΗΣΗ ΤΗΣ ΝΟΗΜΟΣΥΝΗΣ

Ο Stenberg σε μια εργασία του , έδειξε, ότι δεν υπήρχαν διαφορές μεταξύ «καλών» και «αδυνάτων» λυτών ως προς τις στρατηγικές που εφήρμοσαν στην επίλυση προβλημάτων αναλογίας, αλλά υπήρχαν διαφορές ως προς τον χρόνο που απαιτήθηκε για την υλοποίησή τους.

Παρατηρήθηκε , ότι οι καλοί λύτες αφιερώνουν περισσότερο χρόνο στην κωδικοποίηση . Ο επί πλέον αυτός χρόνος, καθιστά τις λειτουργίες της επαγωγής της χαρτογράφησης και της εφαρμογής, πιο αποτελεσματικές και πιο αποδοτικές.

Η ιδέα της εξάσκησης της νοημοσύνης είναι μια γοητευτική ιδέα για πολλούς ερευνητές , αλλά μέχρι στιγμής δεν έχει βρεθεί τρόπος μετατροπής ενός μαθητή του «μέτρια» σε μαθητή του «άριστα» .Σε έρευνα (Alexander και άλλοι) είχε βρεθεί ότι επιδόσεις σε προβλήματα αναλογικού συλλογισμού, μπορούν να βελτιωθούν , αλλά δεν έχουν βρεθεί ακόμη γενικεύσεις αυτής της βελτίωσης σε παρόμοιες έρευνες. Η νοημοσύνη , θα μπορούσε να βελτιωθεί , αν γνωρίζαμε αρκετά για την διαδικασία και τους μηχανισμούς που υπάρχουν πίσω από την ανθρώπινη σκέψη. Οι έρευνες προς αυτή την κατεύθυνση θα συνεχιστούν . Οι γνωστικοί ψυχολόγοι έχουν βρει τις τελευταίες δεκαετίες πάρα πολλά και όλες οι ενδείξεις μας πείθουν ότι θα βρεθούν και πολλά άλλα στο προσεχές μέλλον.

8. Προαιώνιες προκαταλήψεις ενάντια στην μάθηση.

8.1 ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΕΤΥΜΟΥ ΤΗΣ «ΨΥΧΗΣ»

Όταν ομιλούμε για το «έτυμον» μιας λέξης, ομιλούμε για την «αρχική αλήθεια» (είναι η αρχική σημασία της λέξης στα Ελληνικά) Από την άλλη πλευρά η αλήθεια είναι το «α» το στερητικόν + «λήθη» (=η ξεχασιά) . Επίσης ισχύει η διαδεδομένη αντίληψη ότι «αρχή σοφίας ονομάτων επίσκεψις». Γιατί όμως ένας τέτοιος πρόλογος;

Ας πάρουμε το έτυμον της λέξης «ψυχολογία». Προφανώς είναι «ο περί ψυχής λόγος». Και βέβαια στα Ελληνικά, «λόγος» είναι αυτό που στα νέα Ελληνικά εννοούμε «ορθός λόγος» . Έτσι, ο «ορθός λόγος» παραπέμπει ευθέως στην «επιστήμη» (επί +ίστημι) στην «επισταμένη» μελέτη ενός πράγματος, αλλά η μεγάλη ατυχία υπάρχει στην λέξη «ψυχή». Η «ψυχή» σύμφωνα με ΟΛΕΣ τις φιλοσοφικές και θρησκευτικές αντιλήψεις και σε ολόκληρη την υφήλιο, είναι **και άϋλη και αθάνατη.** Ανεξάρτητα από τις επί μέρους διαφορές θρησκειών και θρησκευμάτων καθώς και των φιλοσοφικών θεωρήσεων και θεωριών, οι ιδιότητες της ψυχής ως **άϋλης και**

αθάνατης , επάγουν την προφανή σκέψη, ότι εφ΄ όσον η ψυχή είναι άϋλη και αθάνατη, δεν υπόκειται σε νόμους της ύλης , άρα είναι **ακούραστη.** Επίσης ως έδρα της ψυχής αρχικά πιστευόταν η καρδιά και έπειτα η κεφαλή και **ο εγκέφαλος** ειδικότερα.

Έτσι φθάνουμε στην μεγάλη παρανόηση που κουβαλά **η ψυχολογία ως όνομα και ετυμολογική καταγωγή** . Φθάνουμε στις επιπτώσεις πάνω στις κοινές αντιλήψεις των ανθρώπων , οι οποίες δεν είναι **καθόλου περιθωριακές** είναι μάλιστα άκρως **διαδεδομένες** και συναντώνται και σε μορφωμένους ανθρώπους με ανώτατη εκπαίδευση (λόγω ίσως της αντίληψης περί ψυχής της θρησκείας) .

8.2 Ο ΕΓΚΕΦΑΛΟΣ ΕΙΝΑΙ ΑΚΟΥΡΑΣΤΟΣ;

Η απάντηση είναι προφανώς όχι. Την ίδια απάντηση θα εισπράξουμε κι αν θέσουμε το ερώτημα σε όλους τους ανθρώπους. Αλλά το θέμα είναι αν με την όλη συμπεριφορά του ο άνθρωπος αποδέχεται ή όχι την προφανή αυτή αλήθεια. Και εδώ , τον λόγο έχει η παρατήρηση της συμπεριφοράς των ανθρώπων:

Πάμπολλοι μαθητές , την παραμονή των εξετάσεων σε ένα μάθημα, ξενυχτούν διαβάζοντάς το.

Ας βάλουμε στο μικροσκόπιο την παραπάνω συμπεριφορά:

Το να συμπεριφέρεται κάποιος έτσι, σιωπηρώς , έστω και ασυνειδήτως, αποδέχεται τα παρακάτω:

- Ο εγκέφαλος δεν κουράζεται ή τουλάχιστον εάν κουράζεται, αυτό δεν έχει επίπτωση στην λειτουργία του.
- Το φαινόμενο της απομνημόνευσης ενός κειμένου και οι συνεχόμενες ώρες που αφιερώνουμε στην μελέτη του είναι ποσά ανάλογα ή τουλάχιστον γραμμικά και θετικά συσχετισμένα.
- Ο εγκέφαλος δεν είναι όπως τα άλλα όργανα του ανθρώπου που υπόκεινται στην αιμάτωση στην ανταλλαγή ενέργειας και στον κάματο, αλλά έχει άλλη ποιότητα.

Όταν η παραπάνω απαράδεκτη συμπεριφορά επισημανθεί στο υποκείμενο, θα βρει του κόσμου τις αιτιάσεις για να δικαιολογηθεί. Ίσως η επίκληση του άγχους των εξετάσεων να στέκει ως λόγος αυτής της συμπεριφοράς, αλλά από την άλλη όταν υποδεικνύεται μια νυκτερινή κατάκλιση και μια αφύπνιση 2-3 ωρών προ των εξετάσεων για την «τελευταία επανάληψη» εκεί δεν υπάρχει σοβαρή συνέχεια των αιτιάσεων, αλλά παρ΄ όλα ταύτα ο δάσκαλος πρέπει να γίνει πολύ πειστικός με κάποια βιωματική –πειστική μέθοδο για να αλλάξει αυτή

την συμπεριφορά . Μια καλή μέθοδος είναι η ανάκληση από την μνήμη των προσωπικών εμπειριών των υποκειμένων . Εκεί όμως μπορεί να προκύψουν αναπάντεχα εμπόδια, ακόμα και από ενηλίκους , και εκπαιδευμένους σε ΑΕΙ συναδέλφους!…..

8.3 ΕΝΑΣ ΑΥΘΕΝΤΙΚΟΣ ΔΙΑΛΟΓΟΣ

-Πόσες φορές σου έχει τύχει να προσπαθείς να λύσεις μια άσκηση ας πούμε Γεωμετρίας και να μην μπορείς να την λύσεις, μετά να κοιμάσαι αποκαμωμένος από την προσπάθεια και το πρωί η λύση να προκύπτει σχεδόν αυτόματα;

-Πάρα πολλές φορές!…….

-Και εμένα το ίδιο συμβαίνει!…..Έχεις όμως κάποια ιδέα για το «γιατί;»

-Έ….είναι προφανές!…..Στην διάρκεια του ύπνου το υποσυνείδητο επεξεργάζεται την άσκηση που ήθελες τόσο πολύ να λύσεις όλη την νύκτα και το πρωί την έχει ήδη λύσει, γι αυτό προκύπτει σχεδόν αυθόρμητα !

-Και που το ξέρεις εσύ αυτό;

- Έτσι λέει η ψυχολογία!….

- Δεν μου λες που το διάβασες να ….το μάθω και εγώ;

- Διακρίνω μια ειρωνεία στο ύφος σου ή όχι;

- Μα βρε Κώστα , είναι δυνατόν να δουλεύει λογικά το μυαλό κατά την διάρκεια του ύπνου; Στον ύπνο κάνει ο εγκέφαλος…άδειασμα του κάδου ανακύκλωσης, άδειασμα των προσωρινών αρχείων, διόρθωση αρχείων του συστήματος και ανασυγκρότηση δίσκων! Αλλά …….δεν δουλεύει κανένα λογισμικό! ….Πώς μπορείς να πάρεις αποτελέσματα ενός προβλήματος;;

- Μα δουλεύει ο εγκέφαλος στον ύπνο! Πώς βλέπεις όνειρα;
- Βλέπεις, αλλά τα όνειρα μπλέκουν το χρόνο παρελθόν και παρόν, τον τόπο , ζώντες και νεκρούς. Γίνεται ένα αλαλούμ !…..Μαθηματικά με παραγωγική λογική θα σου βρουν που δεν μπορείς να κάνεις στον …..ξύπνιο σου;
- Και τότε πώς λύνεις την άσκηση σχεδόν αυτόματα μόλις αφυπνίζεσαι;
- Η καθαρότητα και το ξεκούραστον του εγκεφάλου οδηγούν σε λίγο χρόνο στην εύρεση της έμπνευσης για την λύση!
- Τόσο γρήγορα;…..Δεν το πιστεύω!….
- Και η μπαταρία όταν είναι μισοάδεια δεν μπορεί να εκκινήσει την μηχανή του αυτοκινήτου , όσες προσπάθειες κι αν κάνει , αλλά όταν επαναφορτιστεί και αποκτήσει την κατάλληλη τάση θα μπορεί να

δημιουργήσει την σπίθα που χρειάζεται για την εκκίνηση!.

- Και ποιος σου είπε ότι μπορείς να παρομοιάσεις τον εγκέφαλο με την μπαταρία;….
- Εν τάξει, δεν μπορώ….Όταν έχεις φάει γιατί δεν δουλεύει το μυαλό σου καλά;
- Διότι το πολύ το αίμα πάει στο στομάχι για την χώνευση και αναγκαστικά φεύγει και από τον εγκέφαλο . Οι σωματικές λειτουργίες καταστέλλονται και γι αυτό δημιουργείται αίσθημα υπνηλίας μετά το φαγητό!….
- Δηλαδή όταν έχεις υπνηλία δεν δουλεύει καλά ο εγκέφαλος ενώ όταν κοιμάται μπορεί να λύσει άσκηση Γεωμετρίας; Μα ο ύπνος δεν είναι μια προχωρημένη ποσοτικά και ποιοτικά κατάσταση υπνηλίας, όπου αν υπερβεί κάποιο όριο κούρασης , περιπίπτει σε κατάσταση κι άλλης περαιτέρω καταστολής των σωματικών λειτουργιών όπου την ονομάζουμε ύπνο;
- Άλλο ύπνος και άλλο υπνηλία! Δεν συσχετίζονται γραμμικά -ποσοτικά , υπάρχει ποιοτική διαφορά! Δεν έχεις ακούσει για τα στάδια του ύπνου REM κτλ;
- Άστο αυτό, θα σου πω άλλο επιχείρημα: Υπάρχει τρόπος να επαυξήσεις τις νοητικές σου ικανότητες προ των εξετάσεων;

- Ναι!….Να πιεις ένα ρόφημα σοκολάτα βαρύ γλυκό ή να φας μια σοκολάτα ή ένα μπακλαβά ή ένα «κατά την υφήν» (καταίφι Τουρκιστί!) από τα οποία προσφέρεται άμεση πρόσληψη σακχάρων και τα οποία καίγονται γρήγορα και παράγουν τα ενεργειακά τους αποτελέσματα και στον εγκέφαλο!
- Εν τάξει ! .Μου φθάνει που γνωρίζεις ότι οι νοητικές και άρα και οι μαθηματικές ικανότητες δεν είναι σταθερές, αλλά μεταβάλλονται για το ίδιο πρόσωπο ανάλογα με την διατροφή του, τις ώρες ύπνου του και την ψυχολογική του διάθεση , τα οποία πρέπει να βελτιστοποιήσουμε για να επιτύχουμε το μέγιστο της απόδοσης κάθε φορά!

Εκεί σταματά ο διάλογος . Ας μην νομίσει ο αναγνώστης ότι βρίσκεται κάποια άκρη πάντα ή ότι πείθεται ο συνομιλητής ! Οι παραθεωρίες και οι παραψυχολογίες είναι πανταχού παρούσες και ελλοχεύουν παντού.

Μπορεί όλοι ανεξαιρέτως οι προπονητές ποδοσφαίρου να θεωρήσουν ως τρελό όποιον τους συστήσει να κάνουν Σαββατο-βραδινή ολονύκτια προπόνηση εν όψει του πρωινού δύσκολου ποδοσφαιρικού ντέρμπυ , αλλά αντίθετα , αρκετοί γονείς και δάσκαλοι δεν θα αποτρέψουν τον μαθητή τους ή τον κανακάρη τους από το να ξενυχτήσει διαβάζοντας!

Φαίνεται ότι ακόμα και κατακτήσεις που έχουν προκύψει από θετικές επιστήμες όπως όντως είναι η Ψυχολογία , με επανειλημμένη παρατήρηση και πείραμα , με διασταύρωση, με δημόσιο έλεγχο, δεν μπορούν να εμπεδωθούν από τον κόσμο. Οι προσδοκίες των ανθρώπων και τα παντός είδους «πιστεύω» τους δεν συνάδουν πάντα με την αλήθεια.

Μάλιστα ένα καλό μέτρο του κατά πόσο μια επιστήμη έχει προχωρήσει σε εξέλιξη σε σχέση με το επιθυμητό επίπεδο από την κοινωνία , είναι το εάν και κατά πόσον παράλληλα με την επιστήμη υπάρχει και η ….παρα-«επιστήμη».

Παραδείγματα:

- Η οδοντιατρική επιστήμη(σε σχέση με το αντικείμενο που έχει) έχει προχωρήσει στα επιθυμητά από την κοινωνία επίπεδα διότι έχει εξαφανιστεί η παρα-οδοντιατρική (όχι τα παραοδοντιατρικά επαγγέλματα!) που εξέφραζε ο κουρέας ο οποίος προαιώνια έκανε χρέη οδοντιάτρου και αισθητικού .
- Η γενική Ιατρική και η φαρμακολογία δεν φαίνονται να ανταποκρίνονται πλήρως στις προσδοκίες της κοινωνίας, διότι οι παντός είδους κομπογιαννίτες υπάρχουν και δρουν ακόμη. ….
- Αντίθετα, η Χειρουργική είναι αδιανόητο να υπάρχει από ..πρακτικούς! Αυτό σημαίνει ότι έχει κάνει

άλματα προόδου (σε σχέση πάντα με τις προσδοκίες της κοινωνίας.) Το ίδιο και η Μαιευτική . Ο Μαιευτήρας εξετόπισε πλήρως την πάλαι ποτέ …γριά-μαμή!

- Η Χημεία , έπαψε προ πολλού να συνυπάρχει με την ….αλχημεία .
- Τα Μαθηματικά έπαψαν προ πολλού να είναι συνώνυμα της ….μαγείας (Αν και κουβαλούν κάποια ιστορικά –διδακτικά κατάλοιπα) Η μεγάλη μαθηματικός της αρχαιότητας Υπατία εξοντώθηκε από τον μαινόμενο χριστιανικό όχλο ως …μάγισσα!
- Η Αστρονομία εξακολουθεί να συγχέεται με την ....Αστρολογία.
- Με παρόμοιο αλλά πολύ χειρότερο τρόπο και η ψυχολογία συγχέεται με την παραψυχολογία , όπου ο επιστήμων ψυχολόγος συγχέεται με τον ερασιτέχνη «ψυχολόγο –φυσιογνωμιστή» που «ψυχολογεί» , η Ψυχολογία με την ...παραψυχολογία, η ψυχιατρική με την τρελλοϊατρική , οι ψυχολόγοι με τους «τηλεπαθητικούς» κτλ. Περισσότερο δεινοπαθεί η ίδια η λέξη «ψυχολογία» που πλέον χρησιμοποιείται στα πλέον απίθανα σημεία :

- Η ομάδα μας δεν απέδωσε διότι δεν είχε καλή ψυχολογία
- Τα πάντα είναι θέμα ψυχολογίας του παίκτη.

- Σήμερα είχαμε άσχημη ψυχολογία

Και τα ανωτέρω αποτελούν φυσικά την απόδοση του όρου «ψυχική διάθεση»

Αλλά η μεταφυσική αντίληψη για την Ψυχολογία φαίνεται και στην παρακάτω τυποποιημένη έκφραση:

- Παρ΄ ότι είμαστε προπονημένοι και είχαμε άριστη φυσική κατάσταση, χάσαμε γιατί δεν είχαμε καλή ψυχολογία!……

Με αυτή την βαρύγδουπη δήλωση ο προπονητής (που πρέπει να είναι και καλός «ψυχολόγος») εμφανίζεται να διαχωρίζει το σώμα και την ψυχή και να μην τα βλέπει ολιστικά δηλ. την ψυχοσωματική ολότητα του ανθρώπου.

Φαίνεται ότι θα περάσουν πολλά χρόνια για να συγκλίνουν οι απόψεις των ανθρώπων τουλάχιστον επί των ορισμών!

Εν τω μεταξύ θα συνεχίσουν οι παρενέργειες των δοξασιών περί ακαταπόνητης «ψυχής»-νου κτλ που πλήττουν τους μαθητές και προκαλούν ανάσχεση στην εκδήλωση των ικανοτήτων τους και φυσικά και των μαθηματικών τους τοιαύτων……..

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι.

ΕΙΔΙΚΕΣ ΜΑΘΗΣΙΑΚΕΣ ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΕΞΙΟΤΗΤΑ

Ο όρος «Ειδικές Μαθησιακές Δυσκολίες» αναφέρεται σε μία ξεχωριστή κατηγορία δυσκολιών που αφορούν τη μάθηση, και πιο συγκεκριμένα την επεξεργασία του γραπτού λόγου.

Εκφράζονται με την έντονη και επίμονη δυσκολία του μαθητή να αποκτήσει τις ικανότητες Ανάγνωσης, Ορθογραφημένης Γραφής και/ή τη Μαθηματική Ικανότητα, σε βαθμό ανάλογο με τη χρονολογική ηλικία του, τη νοημοσύνη του και την εκπαίδευση που έχει λάβει.

Τρεις κατηγορίες Ε.Μ.Δ.

1) Διαταραχή της Ανάγνωσης

Η επίδοση στην ανάγνωση είναι σημαντικά κάτω από το αναμενόμενο, δεδομένων της χρονολογικής ηλικίας του ατόμου, της μετρηθείσας νοημοσύνης του και της εκπαίδευσης που αντιστοιχεί στην ηλικία.

Βασικότερα συμπτώματα:

- Ανάγνωση αργή, με δισταγμό, χωρίς ροή, συχνά συλλαβισμός.

- Παράλειψη, πρόσθεση, αντικατάσταση γραμμάτων, συλλαβών ή λέξεων κατά την ανάγνωση
- Ελλιπής κατανόηση του κειμένου.

2) Διαταραχή της γραπτής έκφρασης / γραφής

Οι δεξιότητες της γραφής είναι σημαντικά κάτω από το αναμενόμενο, δεδομένων της χρονολογικής ηλικίας του ατόμου, της μετρηθείσας νοημοσύνης και της εκπαίδευσης που αντιστοιχεί στην ηλικία.

Βασικά συμπτώματα

- Παράλειψη, πρόσθεση, αντικατάσταση γραμμάτων, συλλαβών ή λέξεων κατά την γραφή
- Πολλά ορθογραφικά λάθη, ακόμα και σε λέξεις που έχουν συστηματικά διδαχθεί.
- Κακογραφία, μουτζούρες, απουσία σημείων στίξης, κατάργηση των διαστημάτων.

Ο όρος «δυσλεξία» που χρησιμοποιείται ευρέως, αναφέρεται στις Διαταραχές Ανάγνωσης και Γραπτής Έκφρασης, που στις περισσότερες περιπτώσεις συνυπάρχουν. Με άλλα λόγια, «δυσλεκτικό» θεωρείται το άτομο που έχει Ειδική Μαθησιακή Δυσκολία Ανάγνωσης και Ειδική Μαθησιακή Δυσκολία Γραπτής Έκφρασης.

Η δυσλεξία δεν είναι διαταραχή της εκφοράς του λόγου. Η ομιλία και η άρθρωση των δυσλεκτικών ατόμων είναι φυσιολογικές (εκτός αν συμβαίνει συμπτωματικά να

υπάρχει και κάποια άλλη διαταραχή μαζί με τη δυσλεξία).

3) Διαταραχή των Μαθηματικών

Η μαθηματική ικανότητα είναι σημαντικά κάτω από το αναμενόμενο, δεδομένων της χρονολογικής ηλικίας του ατόμου, της μετρηθείσας νοημοσύνης και της εκπαίδευσης που αντιστοιχεί στην ηλικία. Η Διαταραχή των Μαθηματικών είναι η πιο σπάνια από τις Ε.Μ.Δ.

Βασικά συμπτώματα

- Δυσκολία στην αναγνώριση των μαθηματικών συμβόλων (+, -, x, :)
- Δυσκολία στην αντιγραφή αριθμών, πράξεων, δυσκολία στη χρήση «κρατούμενων».
- Δυσκολία στην εκμάθηση του πολλαπλασιασμού

Πέρα από τα ειδικά συμπτώματα κάθε Ειδικής Μαθησιακής Δυσκολίας υπάρχουν και ορισμένα γενικά χαρακτηριστικά που μπορεί να έχουν τα άτομα με Ε..Μ..Δ.:

- Δυσκολία στον προσανατολισμό, στην αίσθηση του χώρου και του χρόνου
- Δυσκολία στην αντίληψη της διαδοχής και της αλληλουχίας
- Δυσκολία στην οργάνωση της μελέτης, της εργασίας και του χρόνου τους.

- Δυσκολία στην τήρηση του προγράμματος
- Έλλειψη ενδιαφέροντος για τα βιβλία και για οτιδήποτε χρησιμοποιείται γραπτός λόγος.

Παρόλη την αδυναμία που δείχνουν τα άτομα με Ε.Μ.Δ. στην έκφραση, έχουν πλούσιο συναισθηματικό κόσμο, καλή κριτική ικανότητα, προβληματίζονται για τα κοινωνικά θέματα, έχουν διαμορφωμένες θέσεις και απόψεις .... όμως συχνά μοιάζει να μην βρίσκουν τις λέξεις για να εκφραστούν!

Συχνότητα εμφάνισης των Ε.Μ.Δ.

Η συχνότητα εμφάνισης των Ε.Μ.Δ είναι δύσκολο να προσδιοριστεί. Το ποσοστό μπορεί να ποικίλλει από χώρα σε χώρα γιατί η διάγνωση των Ε.Μ.Δ. επηρεάζεται τόσο από τα διαγνωστικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται, όσο και από το γλωσσικό περιβάλλον που υπάρχει σε κάθε χώρα. Το ποσοστό των ατόμων με Ε.Μ.Δ. στον ελληνικό χώρο δεν είναι γνωστό, γιατί δεν έχει γίνει καμία επίσημη έρευνα. Υπολογίζεται πάντως ότι το ποσοστό των ατόμων με Ε.Μ.Δ. είναι ~5% του γενικού πληθυσμού.

Που οφείλονται οι Ε.Μ.Δ.

Η αιτιολογία δεν είναι γνωστή. Υπάρχει η υπόθεση ότι οφείλονται σε όποια δυσλειτουργία στο Κεντρικό Νευρικό Σύστημα. Σε ορισμένες περιπτώσεις υπάρχει κληρονομική βάση (κάποιο μέλος της οικογένειας έχει παρόμοιες

δυσκολίες) και σε άλλες υπάρχει συγγενής αιτιολογία (συμβάντα κατά την κύηση ή τον τοκετό).

Οι Ε.Μ.Δ. είναι εγγενείς στο άτομο, δηλ.

- χαρακτηρίζουν (ή όχι) ένα άτομο από τη γέννησή του μέχρι το τέλος της ζωής του.
- Δεν εμφανίζονται ξαφνικά κάποια στιγμή και
- δεν εξαφανίζονται μετά από χρόνια.

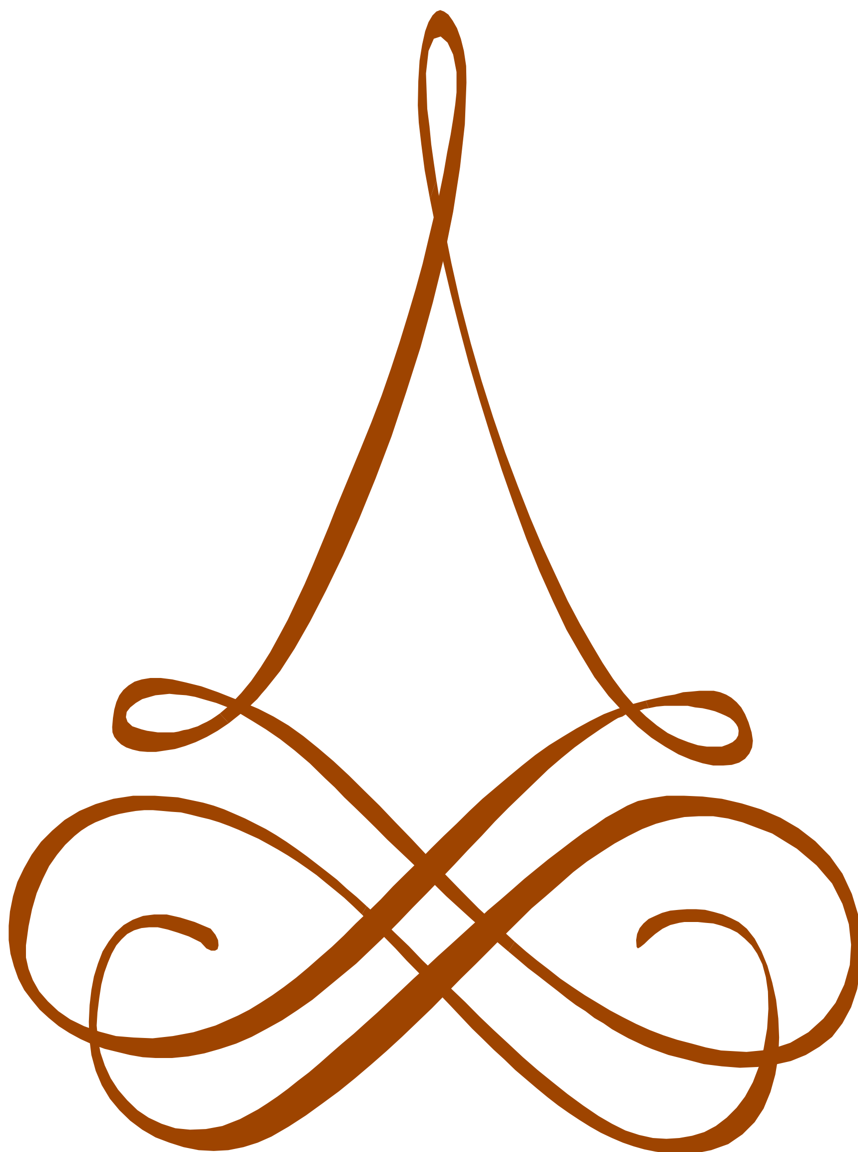
Πως αντιμετωπίζονται οι Ε.Μ.Δ

Όπως είπαμε, οι Ε.Μ.Δ. χαρακτηρίζουν (ή όχι) ένα άτομο από τη γέννηση του μέχρι το τέλος της ζωής του. Με άλλα λόγια, οι Ε.Μ.Δ. δεν «θεραπεύονται». Αυτό, όμως που θεραπεύεται είναι τα συμπτώματά τους.

Με ειδικές μεθόδους διδασκαλίας, με ειδικές ασκήσεις και με κατάλληλη οργάνωση της μελέτης τα άτομα με Ε.Μ.Δ. μαθαίνουν τρόπους να παρακάμπτουν τις δυσκολίες τους και βελτιώνονται σ' αυτά που υστερούν

- Αν έχομε ενδείξεις ότι ένα παιδί έχει Ε.Μ.Δ.:
  Το παιδί δυσκολεύεται ιδιαίτερα να διαβάσει, παρ' ότι τα παιδιά της ηλικίας του έχουν κατακτήσει αυτή τη δεξιότητα.
- Κάνει πολλά ορθογραφικά λάθη, ακόμα και σε λέξεις πολύ κοινές .
- Δυσκολεύεται ιδιαίτερα να γράψει κάποιο κείμενο,

Μια τέτοια μακροσκοπική διάγνωση , θέλει μια επίσκεψη σε ειδικό.



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ[6].

ΕΧΟΥΝ ΤΑ ΖΩΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΔΕΞΙΟΤΗΤΕΣ;;;

ΟΙ ΣΚΥΛΟΙ είναι πιθανόν πολύ εξυπνότεροι απ' όσο πιστεύουν οι περισσότεροι άνθρωποι, σύμφωνα με μια νέα μελέτη.



Επιστήμονες είναι πεπεισμένοι ότι οι σκύλοι μπορούν να μετρούν και ερευνητές του Πανεπιστήμιου Ντέιβις της Καλιφόρνιας υποστηρίζουν ότι τα συμπαθή τετράποδα προσπαθούν να διαβιβάσουν διάφορα μηνύματα με την οξύτητα και το ρυθμό των γαβγισμάτων τους.

Επιστήμονες της συμπεριφοράς των ζώων πίστευαν ότι το γάβγισμά τους ήταν απλώς ένας τρόπος για να τραβάνε την προσοχή. Τώρα μια νέα μελέτη αναφέρει πως κάθε σκύλος έχει συγκεκριμένα γαβγίσματα με ένα φάσμα νοημάτων», γράφει το περιοδικό «New Scientist».

Οι σκύλοι ξέρουν επίσης πότε τους δίνουν λιγότερες «λιχουδιές» επειδή έχουν μια θεμελιώδη μαθηματική

[6] ΝΑΥΤΕΜΠΟΡΙΚΗ
Πέμπτη, 1 Αυγούστου 2002

ικανότητα χάρη στην οποία μπορούν να ξεχωρίζουν πότε ένας σωρός αντικειμένων είναι μεγαλύτερος από έναν άλλο. Αλλά για να μετρήσει, ένα ζώο πρέπει να καταλαβαίνει ότι κάθε αντικείμενο σε μια ομάδα ανταποκρίνεται σε ένα και μόνον αριθμό και ότι ο τελευταίος αριθμός μιας ακολουθίας αντιπροσωπεύει το συνολικό αριθμό των αντικειμένων», προσθέτει το «New Scientist».

Ο Ρόμπερτ Γιάνγκ του Ποντιφικικού Καθολικού Πανεπιστημίου του Μίνας Γκεράις στο Μπέλο Οριζόντε της Βραζιλίας δοκίμασε τη θεωρία σε 11 ημίαιμα σκυλιά δίνοντάς τους «λιχουδιές» για σκύλους. Οι σκύλοι έβλεπαν τα κεράσματα και μετά μια οθόνη κατέβαινε και οι λιχουδιές είτε έμεναν όπως ήταν είτε μερικές προσετίθεντο ή αφαιρούντο. Όταν μια λιχουδιά είχε προστεθεί ή αφαιρεθεί, οι σκύλοι κοιτούσαν τα κεράσματα για πολύ περισσότερο χρόνο απ' ό,τι όταν οι λιχουδιές δεν είχαν πειραχτεί, πιθανόν επειδή είχαν κάνει τους υπολογισμούς τους και οι αριθμοί δεν ανταποκρίνονταν στις προσδοκίες τους.

Οι σκύλοι κατάγονται από τους λύκους, οι οποίοι όχι μόνο έχουν ένα μεγάλο νεοχιτώνιο -το εγκεφαλικό κέντρο της λογικής- αλλά ζουν και σε μεγάλες κοινωνικές ομάδες», αναφέρει το περιοδικό.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙΙ

ΦΥΛΟ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΔΕΞΙΟΤΗΤΕΣ

Γενικά

Το θέμα «Φύλο και μαθηματικές δεξιότητες» είναι μια ειδική περίπτωση του γενικότερου θέματος «Διαφορές των δύο φύλων» Πρόκειται για θέμα τα οποίο έχει κακοποιηθεί βάναυσα , με αποτέλεσμα , ακόμα και σήμερα να μην έχουμε εντελώς ξεκάθαρες αντιλήψεις . Τα ερωτήματα μπορούν να συνοψιστούν κυρίως στα παρακάτω:

- Υπάρχουν διαφορές στα δύο φύλα σε ό,τι αφορά τις δεξιότητες στην μαθηματική σκέψη;
- Αν υπάρχουν μπορούν να μετρηθούν αποτελεσματικά;
- Πόσο επηρεάζουν κοινωνικοί παράγοντες και προκαταλήψεις τα παρατηρούμενα αποτελέσματα;
- Οι όποιες διαφορές , αν υπάρχουν , έχουν βιολογική (και άρα είναι μη αναστρέψιμοι) βάση ή μήπως έχουν κοινωνική βάση μόνο (και άρα αλλάζουν σε μια ενδεχόμενη αλλαγή των κοινωνικών υποδομών;)

Το φαινόμενο της προκατάληψης της επιβεβαίωσης.

Ένας από τους ερευνητές που πρωτοασχολήθηκε με το ανωτέρω φαινόμενο ήταν ο Wason (1968) .Έκτοτε η έρευνες συνεχίστηκαν από Mynatt, Doherty & Tweney κ.ά. οι οποίες έδωσαν τα ίδια αποτελέσματα: **«Κάθε φορά που προσπαθούμε να ανακαλύψουμε εάν οι πεποιθήσεις για τον κόσμο είναι σωστές, βρίσκουμε**

πιο εύκολο να ψάξουμε για ενδείξεις που να επιβεβαιώνουν τις πεποιθήσεις μας, παρά να βρούμε ενδείξεις που να διαψεύδουν αυτό που πιστεύουμε»

Περιττό να τονισθεί, ότι έχουν γίνει πολλές , πάμπολλες θα λέγαμε έρευνες που κουβαλούσαν την προκατάληψη και τα πιστεύω του ερευνητή με οδυνηρά (Για την αλήθεια!) αποτελέσματα . Άλλες έρευνες συνέδεσαν τα αποτελέσματα των ερευνών με το φύλο του ερευνητή και βρήκαν …θετική συσχέτιση λ.χ. αναφορικά με το «επιστημονικό» αποτέλεσμα και το φύλο του ερευνητή σχετικά με τις απόψεις του ή την αρχική του υπόθεση και την λεγόμενη «ισότητα» των δύο φύλων.

Την λέξη «ισότητα» την θέσαμε εντός εισαγωγικών , αφού σύμφωνα με την γνώμη μας , αυτή ή έννοια είναι άκρως αντιεπιστημονική. Όλοι οι άνθρωποι έχουν τα μαθηματικά εκπαιδευτικά εφόδια για ξεχωρίζουν τα παρακάτω:

- Η ισότητα ως έννοια σύγκρισης έχει νόημα μεταξύ του εαυτού μου και …εμού.
- Όποια πράγματα δεν είναι ίσα δεν είναι άνισα κατ΄ ανάγκη αλλά υπάρχει και η τρίτη κατάσταση της μη συγκρισιμότητας .
- Ο διχασμός του ανθρώπου σε δύο φύλα, όπως και σε όλα τα ανώτερα όντα, σύμφωνα με τις κρατούσες βιολογικές θεωρίες, έγινε για επιτυχέστερη και αποτελεσματικότερη αντιμετώπιση των προβλημάτων επιβίωσης του είδους.

Αν τα προηγούμενα είναι σωστά και μπορεί να τα αποδεχθεί κάποιος, τότε, εύκολα μπορούμε να συνάγουμε ότι ο ρόλος των δύο φύλων είναι αυτός που υπαγορεύει η βιολογία , δηλαδή «συμπληρωματικός» . Εκεί , μπορούμε να αποδεχθούμε και να συμφωνήσουμε ότι **δεν έχει νόημα μεταξύ συμπληρωματικών πραμάτων να αναζητούμε το ποιο είναι ανώτερο** και το ποίο συμβάλλει αποφασιστικότερα στην επιβίωση. Για

ουδέτερο παράδειγμα να πάρουμε μια συσκευή τηλεόρασης . Έχει νόημα να συζητούμε ποιο εξάρτημά της είναι ανώτερο λ.χ. η οθόνη ή η πλακέτα υποστήριξης; Και τα δύο συμβάλουν στην λειτουργία της και ελλείποντος του ενός ,το άλλο δεν μπορεί να λειτουργήσει την συσκευή καθόλου.

Μπορούμε να θεωρήσουμε τον άνθρωπο κάπως έτσι;

Κατά την γνώμη μας, αυτή η θεώρηση είναι και προφανής και την είχαν καταγεγραμμένη οι Έλληνες στους μύθους τους όταν ομιλούσαν για δύο ημίσεα τα οποία περιπλανώντο και όταν συνευρίσκοντο ένοιωθαν ευτυχή.

Κατά την γνώμη μου η επιστημονική καταγραφή των διαφορών και των ομοιοτήτων στα δύο φύλα , είναι ένα σοβαρό έργο που θα βοηθήσει στην αυτογνωσία των ανθρώπων στην υποβοήθησή τους να εκτελέσουν τις πλέον κατάλληλες επιλογές τους για την ζωή και στην συνακόλουθη ψυχική τους ισορροπία. Πλέον το κίνημα του Φεμινισμού πέτυχε πάρα πολλά και σωστά. (πρόσβαση σε όλα σχεδόν τα επαγγέλματα, ψήφος, ίση αμοιβή για ίση εργασία προστασία μητρότητας κτλ) Βεβαίως και υπολείπονται κι άλλα να γίνουν . Αλλά οι υπερβολές του Φεμινισμού με το ιδεολόγημα της «ισότητας» δεν θα πρέπει να συνεχιστούν και σε αυτό θα συμβάλει η επιστημονική έρευνα.

Κατά την γνώμη του γράφοντος η αποτιμώμενη ως μέγιστη διαφορά των δύο φύλων και οι οποία δημιουργεί τις περισσότερες κοινωνικές στρεβλώσεις όταν αποπειρόμεθα να δούμε τα πράγματα υπό το πρίσμα της «ισότητας» είναι η ηλικία του ορίου τεκνοποίησης.

- **Στον άντρα, ένα θεωρητικό συμβατικό όριο είναι τα 70 χρόνια** (έστω κι αν προσφυώς τα προκύπτοντα τέκνα ενός ηλικιωμένου πατρός ο λαός τα ονομάζει «παιδιά της ορφάνιας»)

- **Στην γυναίκα , το έσχατο συμβατικό όριο είναι τα 36 έτη** (Με κάποια μικρή τεχνητή παράταση-υποβοήθηση ίσως , αλλά και μόνο για ένα τέκνο – «ένα ίσον κανένα»)

Η παραπάνω διαφορά θέτει το δίλημμα σε μια γυναίκα: «Καριέρα ή οικογένεια;» Το ότι υπάρχουν παραδείγματα γυναικών με ζηλευτή επιστημονική καριέρα και οικογένεια αυτό αποτελεί την εξαίρεση του κανόνα. Στους χώρους του θεάματος όπου γυναίκες πουλούν την εικόνα τους εντατικά, έχομε τα πλέον ορατά (λόγω προβολής) παραδείγματα όπου οι γυναίκες αυτές «μη έχοντας χρόνο» να τεκνοποιήσουν μένουν άτεκνες ή στην καλύτερη περίπτωση υιοθετούν κάποιο παιδί. Συνήθως ενθυμούνται την ανάγκη δημιουργίας οικογενείας όταν πάψει η νεότητα και αποσυρθούν τα φώτα της δημοσιότητας από πάνω τους, άρα και οι δουλειές τους. Τότε συνήθως είναι αργά. Αυτό όμως έχεις όλες τις γνωστές ψυχολογικές επιπτώσεις όταν έρχεται η ώρα του απολογισμού της ζωής ενός εκάστου.

Καταγραφές παρατηρήσεων και στατιστικές συσχετίσεις.

Υπάρχουν πλείστες έρευνες με άψογη δειγματοληψία[7], άψογη στατιστική επεξεργασία σε υψηλούς δείκτες στατιστικής σημαντικότητας που παρουσιάζουν ισχυρότατες στατιστικές συσχετίσεις, θετικές ή αρνητικές μεταξύ δύο μεταβλητών μιας έρευνας. Μέχρι εκεί όλα λειτουργούν άψογα. Όταν όμως ο ερευνητής διατυπώνει την υψηλή θετική ή αρνητική συσχέτιση **υπό μορφή ανακάλυψης νόμου,** εκεί αρχίζουν τα λάθη των ερευνών. Το σωστό είναι , παρ΄ όλη την υπάρχουσα και πέραν πάσης αμφιβολίας ισχυρή θετική ή αρνητική στατιστική

[7] Στο σύγγραμμα του κ. Ιωάννου Παρασκευοπούλου «**Μεθοδολογία επιστημονικής Έρευνας**» ΑΘΗΝΑ 1985 , περιγράφονται όλες οι παράμετροι που πρέπει να εκπληροί μια έρευνα για να δώσει τα ικανοποιητικότερα και ασφαλέστερα αποτελέσματα.

συσχέτιση μεταξύ των δύο μεταβλητών, είναι να διατυπώσει ο ερευνητής μία **εικασία** αφήνοντας ανοικτό το συμπέρασμα για άλλη έρευνα όπου θα **απομονωθούν άλλοι παρασιτικοί παράγοντες της έρευνας,** θα υπάρξει **ομάδα ελέγχου των υποθέσεων**[8], θα γίνει η έρευνα και από άλλους ερευνητές, σε άλλο δείγμα κτλ.

Γενικά , στην εξαγωγή συμπερασμάτων **από ισχυρές στατιστικές συσχετίσεις,** θα πρέπει να είμαστε **φειδωλοί** και να προβαίνουμε **μόνο σε εικασία** για περαιτέρω **περισσότερο ειδική και καλοσχεδιασμένη έρευνα** .

ΜΙΑ ΕΡΕΥΝΑ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ ΓΙΑ ΤΟ ΘΕΜΑ ΤΗΣ ΣΤΑΣΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΑΠΕΝΑΝΤΙ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

«Η επίδραση του ψυχοκοινωνικού περιβάλλοντος της τάξης στις στάσεις των μαθητών και στην επίδοσή τους στο μάθημα των μαθηματικών» -Γιαλαμάς Β. Κασιμάτη Αικ. Καραγιώργος Δημ. Περιοδικό «Τα εκπαιδευτικά» τεύχος 44-45 , 1997.

Η έρευνα έγινε με χρήση ερωτηματολογίων το σχ. Έτος 1996-97 σε παιδιά Γ΄Γυμνασίου

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

α. Ως προς την επίδοση

τα ευρήματά συμφωνούν με εκείνα έρευνας στην Α΄ Γυμνασίου (Καραγεώργος, Κασιμάτη και Γιαλαμάς 1996).

---

[8] Στην φαρμακολογία είναι γνωστό το **φαινόμενο «placebo»** . Όταν ελέγχεται η αποτελεσματικότητα ή μη ενός φαρμάκου, υπάρχουν τρεις ισοπληθείς ομάδες ασθενών . Μία ομάδα λαμβάνει το φάρμακο , η άλλη δεν το λαμβάνει κα ιη τρίτη λαμβάνει ένα απλό ζαχαρόπηκτο χάπι (placebo) το οποίο παρουσιάζεται ως πραγματικό φάρμακο στους ασθενείς. Ένα φάρμακο περνά την δοκιμασία αξιοπιστίας και αποτελεσματικότητας, , όταν παράγει μετρήσιμα , στατιστικώς σημαντικά αποτελέσματα σε σχέση και με τις δύο ομάδες . Ενίοτε παρουσιάζεται το εξής παράδοξο και εντυπωσιακό αποτέλεσμα.Η ομάδα που πήρε το **placebo** να δίνει εμφανή και μετρήσιμα σημάδια βελτίωσης για ψυχολογικούς λόγους που επιδρούν στην βελτίωση της υγείας τους! Πρόκειται για εξαιρετικά ενδιαφέρον φαινόμενο , το οποίο είναι γνωστό ως φαινόμενο **placebo**.

Στα θέματα των ασκήσεων που στηρίζονται σε βασικές μαθηματικές έννοιες της διδακτέας ύλης, οι μαθητές παρουσιάζουν την ίδια επίδοση με εκείνη που προκύπτει από την αξιολόγηση του καθηγητή τους. Στα προβλήματα, αντίθετα, οι μαθητές παρουσίασαν πολύ χαμηλή επίδοση. Τίθεται ξανά ο προβληματισμός κατά πόσο η σχολική διαδικασία (αναλυτικά προγράμματα, βιβλία, μέθοδοι διδασκαλίας), εστιάζεται στην επίλυση προβλήματος (Καραγεώργος 1994). Επίσης, σύμφωνα με τα ευρήματα αντίστοιχων ερευνών (Lester & Carofalo 1987, Taplin 1992), πρέπει να λαμβάνεται υπόψη ότι:

1) η αποτυχία ενός μαθητή στην επίλυση προβλημάτων δεν οφείλεται μόνο σε ένα μη επαρκές υπόβαθρο γνώσεων αλλά και σε μια σειρά από άλλους παράγοντες όπως πεποιθήσεις, στάσεις, διαδικασίες αυτοελέγχου και κοινωνικοπολιτισμικές συνθήκες.

II) Οι στάσεις ενός ατόμου αποτελούν «μεταβατικά χαρακτηριστικά» σε αντίθεση με τις συγκινήσεις οι οποίες συγκεκριμενοποιούνται ανάλογα με την περίπτωση και

III) Πρέπει να καλλιεργείται η επιμονή των μαθητών κατά την επίλυση Προβλημάτων.

Σε ανάλογα συμπεράσματα κατέληξε και η έρευνα της Stucey (1990) η οποία έδειξε ότι σε μαθητές Γυμνασίου, υπάρχει εξάρτηση ανάμεσα στις πεποιθήσεις- στάσεις των

μαθητών και στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών καθώς και την επίλυση προβλημάτων στα Μαθηματικά.

Η μικρή υπεροχή ως προς την επίδοση, των κοριτσιών έναντι των αγοριών, και των μαθητών με γονείς υψηλού μορφωτικού επιπέδου συμφωνεί με αντίστοιχες έρευνες στην Ελλάδα (Κασιμάτη 1994, Καραγεώργος, Κασιμάτη και Γιαλαμάς 1996, Χιονίδου 1996). Στο μη τυπικό 4ο πρόβλημα της έρευνας , τα αγόρια επιτυγχάνουν υψηλότερη επίδοση. Αυτό φαίνεται να συμφωνεί με την άποψη ότι τα αγόρια αποδίδουν γενικά καλύτερα από τα κορίτσια σε υψηλότερα γνωστικά επίπεδα μαθηματικών Θεμάτων (Hyde, Fennema Ryan,Frost arid Hopp, 1990).

β. Ως προς τις στάσεις των μαθητών απέναντί στα Μαθηματικά:

Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν, ότι τα κορίτσια εμφανίζουν υψηλότερο άγχος λιγότερη αυτοπεποίθηση και χαμηλότερο κίνητρο αποτελεσματικότητας από τα αγόρια. Παρόλα αυτά, εμφανίζουν υψηλότερες επιδόσεις. Είναι αξιοσημείωτο ότι, ενώ γενικά οι υψηλές επιδόσεις συνδέονται με θετικές στάσεις, στα κορίτσια παρουσιάζεται η αντίστροφη εικόνα. Αντιθέτως υιοθετούν λιγότερο την άποψη ότι τα μαθηματικά είναι κατ εξοχήν ανδρικός χώρος. Σύμφωνες διαπιστώσεις εμφανίζονται σε

έρευνες (Leder 1993, Α. Λεονταρή & Β. Γιαλαμάς1996, Καραγιώργος- Κασιμάτη - Γιαλαμάς 1996).

Το υψηλό μορφωτικό επίπεδο των γονέων σχετίζεται με θετικότερες στάσεις και υψηλότερες επιδόσεις.

Από τις επιδράσεις των παραγόντων Του ψυχοκοινωνικού περιβάλλοντος της τάξης, σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση των στάσεων διαδραματίζει η εμπλοκή των μαθητών στη μαθησιακή διαδικασία, καθώς αυξάνει την αυτοπεποίθηση των μαθητών και συνδέεται με το κίνητρο αποτελεσματικότητας. Ο καθηγητής με υποστηρικτική στάση συμβάλλει στην ελάττωση του άγχους των μαθητών. Σε ανάλογα συμπεράσματα οδηγούνται και οι Koehler and Grouws, (1992), υποστηρίζοντας ότι τα « πιστεύω» και οι ενέργειες των δασκάλων επηρεάζουν τις συμπεριφορές των μαθητών στην τάξη και τα αποτελέσματα της μάθησής τους. Σχέση ανάμεσα στη μαθηματική συμπεριφορά και σε μετρήσεις του περιβάλλοντος τάξης παρατηρήθηκαν και από τους Shaugnessy, Haladyna, and Shaugnesy (1983). Αυτοί εξερεύνησαν το βαθμό στον οποίο ο μαθητής, ο δάσκαλος και οι μεταβλητές του περιβάλλοντος μάθησης ευθύνονται για τη διακύμανση της συμπεριφοράς έναντι στα Μαθηματικά.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, πρέπει να θέσουμε σαν στόχο της μαθηματικής μας εκπαίδευσης την ανάπτυξη

θετικών συμπεριφορών απέναντι στα μαθηματικά και την αναγνώριση της χρησιμότητάς τους από τους μαθητές. Για την επίτευξη αυτού του στόχου, πρέπει να δημιουργούνται περιβάλλοντα μάθησης στα οποία οι δάσκαλοι να είναι υποστηρικτικοί, να δίνεται έμφαση σε καταστάσεις προβληματισμού οι μαθητές να εργάζονται σε ομάδες, να συζητούν για τα Μαθηματικά και να εμπλέκονται σε μαθηματικές δραστηριότητες. Η μάθηση πρέπει να αντιμετωπίζεται ως μια κοινωνική διαδικασία, στην οποία η μαθηματική έννοια και ο σκοπός συνυπάρχουν σαν μέρος μιας μαθηματικής κουλτούρας.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ IV

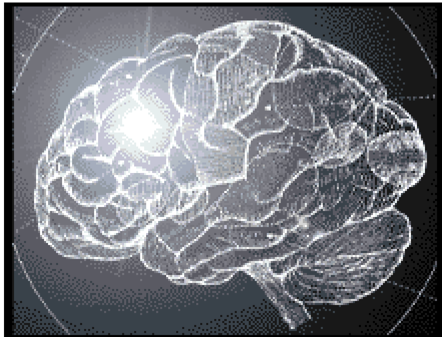
ΜΝΗΜΟΝΙΚΕΣ ΤΕΧΝΙΚΕΣ

Από τις διαφάνειες των παρουσιάσεων των διαλέξεων της κ. Στέλλας Βοσνιάδου στο μάθημα Γνωστικής Ψυχολογίας

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ	Βελτιώνοντας τη μνήμη σας
Τομέας	Βοηθητικές Τεχνικές
Λίστες αντικειμένων	Χρησιμοποιήστε μνημονικές στρατηγικές.Ψάξτε για ακρώνυμα που έχουν νόημα.Δοκιμάστε τη μέθοδο των θέσεων.
Ανάγνωση βιβλίων	Ακολουθήστε το σύστημα SQ3R. Καταμερίστε το χρόνο σας ώστε να σας αφήσει περιθώριο για κατανεμημένη εξάσκηση.Διαβάστε ενεργητικά και όχι παθητικά.
Διαλέξεις	Κρατήστε σημειώσεις αλλά καταγράψτε μόνο τα κύρια σημεία. Σκεφτείτε σχετικά με την όλη οργάνωση του υλικού. Κοιτάξτε τις σημειώσεις σας αμέσως μετά τη διάλεξη για να συμπληρώσετε τα κενά.
Μελέτη για διαγωνίσματα	Κάντε ένα λεπτομερές διάγραμμα των σημειώσεων σας από κάποια διάλεξη αντί να τις διαβάζετε παθητικά.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ V

ΔΙΑΦΥΛΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΕΓΚΕΦΑΛΟΥ (Μια νέα έρευνα)[9]



Οι γυναίκες χρησιμοποιούν ολόκληρο τον εγκέφαλο τους όταν ακούνε κάτι ενώ οι άντρες το μισό

7/5/2002

Νέα ερευνητικά δεδομένα επιβεβαιώνουν αυτό που από καιρό έχουν υποψιασθεί οι γυναίκες... Οι άντρες χρησιμοποιούν μόνο το ένα ημισφαίριο του εγκεφάλου τους όταν ακούνε κάτι, ενώ οι γυναίκες ολόκληρο τον εγκέφαλο τους. Η τελευταία αυτή έρευνα, στην αρχαιότερη διαφορά της ανθρωπότητας, μεταξύ των ατόμων του διαφορετικού φύλου, δεν δηλώνει σε καμία περίπτωση ποιος είναι ο καλύτερος ακροατής. Όμως, με τη χρήση μιας παραλλαγής της μαγνητικής

---

[9] Πηγή: http://www.sciencenews.gr

Σχετικές Συνδέσεις:

Current News in Radiology

Radiological Society of North America

Ατλαντας του Εγκεφάλου

Functional Magnetic Resonance Imaging (FMRI)

Ιατρική Σχολή του Πανεπιστημίου της Indiana

τομογραφίας, (fMRI: λειτουργικός μαγνητικός συντονισμός), με την οποία σαρώνεται ο εγκέφαλος, αναδεικνύονται οι διαφορές στην νευρική δραστηριότητα ανδρών και γυναικών που ακούνε κάποιον να διαβάζει δυνατά.

Η νέα αυτή έρευνα που διεξήχθη από ερευνητές της Ιατρικής Σχολής του Πανεπιστημίου της Indiana, είναι μια τελευταία προσθήκη στην αυξανόμενη συλλογή πληροφοριών που πρεσβεύουν ότι ο νοητικός διαχωρισμός μεταξύ των δύο φύλων είναι πολύπλοκος και βαθιά ριζωμένος στην θεμελιώδη βιολογία του εγκεφάλου, από όσο είχαν ποτέ υποψιαστεί. "Ως επιστήμονες, καταλαβαίνουμε τι είναι το φυσιολογικό, και όλο και συχνότερα φαίνεται ότι το φυσιολογικό για έναν άντρα είναι διαφορετικό από το φυσιολογικό για μια γυναίκα", λέει ο ακτινολόγος, Dr. Micheal Phillips. Τα αποτελέσματα αυτά παρουσιάσθηκαν στο ετήσιο συνέδριο της Ακτινολογικής Εταιρείας Βορείου Αμερικής, στο Σικάγο, και επίσης έχουν υποβληθεί, για έκδοση, στην επιστημονική επιθεώρηση *Radiology*.

Η προσπάθεια να κατανοήσουμε, αν οι διαφορές στην εγκεφαλική και διανοητική ικανότητα μπορούν να αποδοθούν στο φύλο, έχουν μπερδέψει εδώ και πολλά χρόνια τους επιστήμονες, τους γονείς, τους μαχόμενους για ίσα ανθρώπινα δικαιώματα και τους εκπαιδευτικούς.

Το βέβαιο είναι ότι οι εγκέφαλοι ανδρών και γυναικών είναι παρόμοιοι μεταξύ τους, αλλά σίγουρα δεν είναι οι ίδιοι- σε μέγεθος, λογική και ευαισθησίες. Όμως, μόνο τώρα, αξιόπιστες μελέτες του μεταβολισμού και της δομικής οργάνωσης του εγκεφάλου προσφέρουν στους επιστήμονες ισχυρές αποδείξεις για το πώς διαφέρουν νοητικά ο εγκέφαλος ανδρών και γυναικών, συχνά, με τρόπους που αντιστέκονται στις προκαταλήψεις.

Μια αυξανόμενη βιβλιοθήκη ιατρικών ερευνών συλλαμβάνει τα σημάδια της εγκεφαλικής δραστηριότητας σε ζωντανούς εγκεφάλους. Οι γυναίκες και οι άνδρες δείχνουν σημαντικές διαφορές σε κάποιες περιοχές του εγκεφάλου που σχετίζονται με τον τρόπο που οι άνθρωποι σκέφτονται και βιώνουν τα συναισθήματα, τη μαθηματική λογική, την αντίληψη του χώρου και την αντιληπτική ταχύτητα, ακόμα και την αίσθηση του χώρου και του ήχου. Ότι και αν κάνουν, οι γυναίκες φαίνεται ότι ενεργοποιούν πιο πολλούς νευρώνες από ότι οι άνδρες. Κάποιες από αυτές τις διαφορές φαίνεται ότι εξελίχθηκαν στη διάρκεια του βίου. Ο εγκέφαλος των ηλικιωμένων ανδρών και γυναικών έχει σημαντικές λειτουργικές και διαφορές αποκαλύπτουν πρόσφατες έρευνες. Οι εγκέφαλοι των ανδρών είναι μεγαλύτεροι αλλά αλλοιώνονται περισσότερο από την διαδικασία της γήρανσης.

Αντίθετα οι εγκέφαλοι των γυναικών φαίνεται να δουλεύουν πιο ικανοποιητικά.

Στη νέα έρευνα από το Πανεπιστήμιο της Indiana, οι ερευνητές χρησιμοποίησαν τον ανιχνευτή εγκεφάλου σε 20 γυναίκες και σε 20 άντρες -όλοι υγιείς- την ώρα που άκουγαν να διαβάζεται δυνατά ένα θρίλερ, ενώ οι ερευνητές κατέγραφαν τις αντιδράσεις τους. Ο fMRI ανιχνευτής καταδεικνύει την εγκεφαλική δραστηριότητα, παράγοντας πολυδιάστατες εικόνες της αιματικής ροής σε διάφορες περιοχές του εγκεφάλου. Η μελέτη αυτή έδειξε ότι οι άντρες χρησιμοποιούν την αριστερή πλευρά του εγκεφάλου - που συνδέεται παραδοσιακά με την κατανόηση της γλώσσας- για να αντιληφθούν τις συνομιλίες. Οι γυναίκες όμως χρησιμοποίησαν επίσης και την δεξιά πλευρά. Ο Dr. Joseph T Lurito, είπε ότι ίσως οι γυναίκες να χρησιμοποιούν μεγαλύτερο μέρος του εγκεφάλου τους για να ακούσουν μια συνομιλία, αλλά ίσως αυτό να δείχνει ότι οι γυναίκες μπορούν να παρακολουθήσουν ταυτόχρονα δύο ομιλίες.

Το σίγουρο είναι ότι σκοπός της έρευνας δεν είναι να προκληθεί μια διαμάχη μεταξύ των δύο φύλων, αλλά να γίνει κατανοητό ότι άντρες και γυναίκες ίσως να επεξεργάζονται την γλώσσα διαφορετικά.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. «Το πρόβλημα και η επίλυσή του» Δημήτρης Λ. Καραγιώργος Εκδόσεις Σαββάλας.
2. «Ο Εκπαιδευτικός στην τάξη» David Fontana Εκδόσεις Σαββάλα.
3. «Ευρετική» -μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων . Γ. Ρουσόπουλος Εκδόσεις «ΕΛΛΗΝ»
4. «Λύση προβλημάτων» Hank Kahney Εκδόσεις ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΓΡΑΜΜΑΤΑ
5. «Τα παιδιά και η έννοια των αριθμών» Martin Hughes . Εκδόσεις Gutenberg
6. «Η σκέψη των Παιδιών» Margaret Donaldson Εκδόσεις Gutenberg
7. «Τα μαθηματικά για παιδιά από 5 έως 16 ετών» Μετάφραση –εισαγωγή – Επιμέλεια Ε. Τρέσσου Εκδόσεις «Νέα Σύνορα» -Α.Α. ΛΙΒΑΝΗ
8. «Εξελικτική Ψυχολογία» Τόμος 3 & 4 Ιωάννου Ν. Παρασκευόπουλου

9. «Αποδείξεις χωρίς λόγια» Roger . B. Nelsen Εκδόσεις Σαββάλα.
10. «Πώς να το λύσω» G. Polya Εκδόσεις ΚΑΡΔΑΜΙΤΣΑ.
11. «Κακοί αναγνώστες. ΓΙΑΤΙ;» Jacqes Fijalkow Εκδόσεις ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΓΡΑΜΜΑΤΑ.
12. Περιοδικό «Σύγχρονη Εκπαίδευση» Τεύχος 112 Μαίου –Ιουνίου 2000.
13. «Ψυχολογία των Μαθηματικών» Πρόλογος – Επιμέλεια Στέλλα Βοσνιάδου.
14. «Εισαγωγή στην Ψυχολογία»Στέλλα Βοσνιάδου Εκδόσεις Gutenberg.
15. «Διδακτική των Μαθηματικών» Αθανασίου Γαγάτση Εκδόσεις ART of TEXT A.E.
16. «Διδακτική των Μαθηματικών» Γεωρίου Αρ. Δαμάλα ΑΘΗΝΑ 1980
17. «Γνωσιολογική και διδακτική προσέγγιση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών» Ευγενίας Κολέζα Εκδόσεις Leader Books .
18. Διδακτική των Μαθηματικών» Θεόδωρος Γ. Εξαρχάκος Εκδόσεις ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΓΡΑΜΜΑΤΑ.